meSalva!

PARTE I

MATEMÁTICA

PARTE I

MATEMÁTICA

01

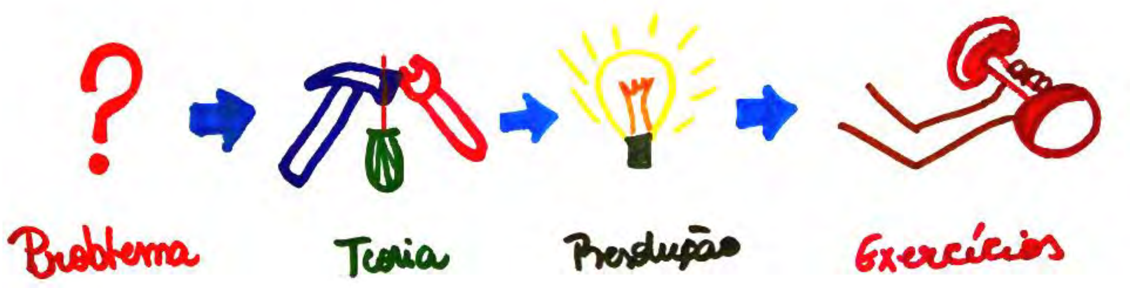
ARITMÉTICA I
OPERAÇÕES BÁSICAS

meSalva!

ARITIMÉTICA I – OPERAÇÕES BÁSICAS

Ao lado da física e da química, a matemática é uma das matérias mais temidas pelos estudantes, por vários os motivos: desde a falta de afinidade do estudante com essa área, até a forma como a matéria foi tratada durante boa parte do período escolar. A falta de identificação com a matemática somada a uma aula totalmente mecânica tende a fazer com que a gente não goste ainda mais da matéria. Além disso, você já deve ter percebido que é muito mais difícil aprender algo que nós não gostamos do que algo que, apesar de difícil, nos agrada, certo?

Pensando em como transformar essa situação, o nosso objetivo com essas apostilas é proporcionar uma nova forma de encarar a matemática, não apenas como vários números, cálculos, equações e desenhos, mas como uma ferramenta imprescindível na resolução de problemas. Por isso, você vai perceber que, em cada uma das apostilas, em todas as seções, antes de qualquer coisa, é apresentada uma situação cotidiana, de ordem prática (ou nem tanto), como um problema a ser resolvido; em seguida, é abordada uma ferramenta matemática (esse é o conteúdo específico) relacionada a essa questão inicial. Então, para que você consiga perceber a conexão entre a teoria e a realidade, esse problema é resolvido utilizando os conhecimentos aprendidos. Por fim, serão propostos alguns exercícios, que pretendem te ajudar a fixar o conteúdo recém aprendido! As apostilas (juntamente com as aulas) são a base teórica para você poder resolver os exercícios de compreensão e fixação disponíveis no vasto acervo da plataforma do Me Salva!



Além disso, se você for daqueles estudantes que não se contenta apenas em aceitar alguma relação, pode consultar o Apêndice de algumas apostilas para ver as demonstrações e/ou deduções do que foi abordado. Dessa forma, pretendemos fazer com que você perceba o quanto a matemática está presente na sua vida e que, apesar de ela não ser trivial, também não é um bicho de sete cabeças.

Então, para iniciar os nossos estudos no maravilhoso mundo da matemática, vamos começar contando um pouco da sua história. Por exemplo: você sabia que o teorema de Pitágoras, na forma como conhecemos hoje, foi proposto por Euclides? E será que é verdade que o sistema decimal foi criado, e é assim chamado, porque podemos utilizar os (dez) dedos das mãos para contar? São essas questões e curiosidades que estudaremos. É uma parte mais *light* para você começar a se familiarizar com o conteúdo e entender porque os povos mais primitivos precisaram "criar" a matemática e o quanto ela foi essencial para o desenvolvimento da sociedade.

Depois disso, iniciaremos nosso estudo relembrando alguns conteúdos mais básicos, como adição, subtração, MDC, MMC, potenciação, radiciação, frações, etc. Você já viu tudo isso lá nas séries iniciais. Aposto que consegue lembrar desses nomes, mas será que lembra como aplicá-los? Lembra como somar frações? E as regrinhas da radiciação e potenciação? Pois é... É por isso que começaremos por aí!

Esses são os módulos mais básicos; a partir deles abordaremos as geometrias plana, analítica e espacial, às vezes fazendo relações com a trigonometria. Você vai ficar craque em formas geométricas, área, volume, equação da reta, círculo trigonométrico, seno, cosseno e tangente! Veremos (ou relembraremos) as equações de 1° e de 2° graus – sim, a famosa Bhaskara! E produtos notáveis, lembra desse nome? Pois é, vamos utilizar bastante! Não podemos esquecer, claro, as sequências numéricas, as queridas PA e PG, além de porcentagem, escala (que você vai utilizar também em Geografia), regra de três (que você vai utilizar na vida toda!). Agora, indo para uma parte um tanto abstrata, que daremos um jeito de deixar mais concreta, estudaremos as funções, as inequações, logaritmos, exponenciais e toda essa parte que talvez não te traga boas lembranças (mas isso vai mudar!). Em seguida, veremos matrizes, determinantes, sistemas lineares, números complexos e polinômios, que podem parecer totalmente desconexos com a realidade, mas você vai perceber que estão mais presentes na sua vida do que imagina. Além disso tudo, abordaremos um conteúdo que o pessoal que gosta de uma jogatina se identifica: análise combinatória, probabilidade e estatística (aquela chance que você tem de ganhar na Mega Sena, como que se calcula mesmo?). E, para podermos manter as contas bem controladas (ou pra saber o quanto aquela bolada da Mega renderia na poupança), estudaremos um pouco de Matemática Financeira. Dá uma olhada no mapa abaixo:

Viu que são muuuuitas coisas para aprender, reaprender ou relembrar, né? Por isso, se você não se dedicar, nem as nossas apostilas superlegais poderão resolver o seu problema, ok? Então, estude bastante, leia e, principalmente, faça os exercícios. Matemática exige bastante treino; por isso, quanto mais exercícios você fizer, mais ~~músculos vai ganhar~~ conhecimento vai ganhar! Bora arrasar nessa matéria? Bons estudos! =D

ARITMÉTICA DE NÚMEROS NATURAIS

Talvez o nosso primeiro contato com números tenha sido perto do nosso primeiro aniversário, quando nossos pais, avós e/ou familiares em geral, nos ensinaram a fazer o número “um” com o dedinho indicador e depois perguntavam quantos aninhos íamos completar. Eu ficaria surpresa se vocês lembrassem disso, mas, provavelmente, já viram alguém fazendo isso ou até mesmo já repetiram esse ato. E isso acontece no segundo aninho ou até no terceiro, até a criança saber falar sua idade. Perceba que, na falta da fala, acabamos gesticulando, indicando os números com os dedos, mesmo que naquele momento a criança não tenha clareza do que essa relação representa. Isso remete ao surgimento dos números, como vimos na História da Matemática, em que o número de determinado objeto era representado por símbolos como bolinhas, cunhas, etc.

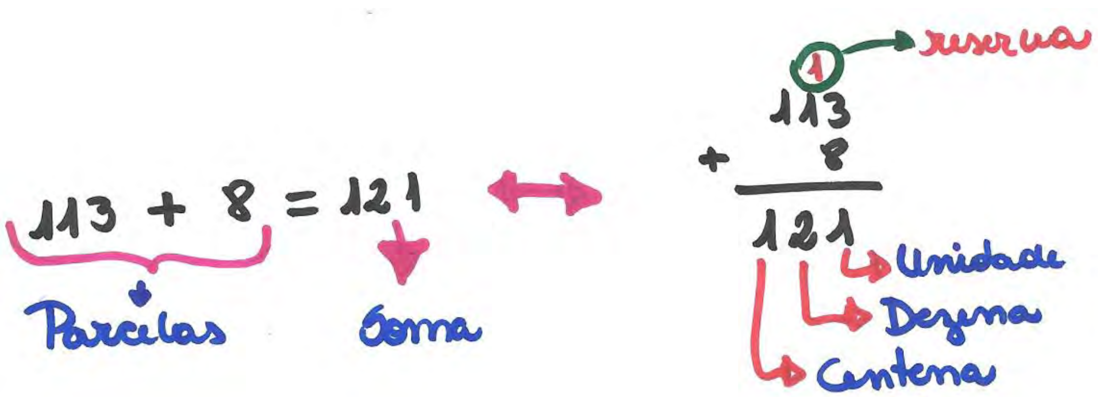
Depois de nos ensinarem a indicar os números com os dedos, os adultos nos ensinaram a contar os dedos das mãos; mas, quando começamos a frequentar a escola, nos deparamos com problemas que nossos dedos não davam conta de resolver. A partir daí foi necessário aprender a representação escrita dos números que indicávamos com nossos dedinhos e, assim, iniciamos nosso estudo da matemática e suas operações básicas.

Vamos relembrar essas operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) porque elas servem de base para tudo o que veremos daqui por diante. Além disso, é bastante importante que você consiga resolvê-las à mão, sem a utilização da calculadora, já que a utilização dessa maquininha maravilhosa não é permitida nas provas de ENEM ou nos vestibulares.

- ✓ **Números naturais:** São os números que conseguimos contar com os dedos, incluindo o zero. O conjunto dos números naturais é representado por **N** (com algumas variações). Por exemplo, **N** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}. Por enquanto é com esses números que vamos tratar, ok?

- ✓ **Adição:** É caracterizada pela soma de duas ou mais "coisas". Exemplo: Você é um grande leitor e tem 113 livros. Como seus amigos sabem da sua paixão, eles te presenteiam com 8 livros. Quantos livros você tem ao todo?

A continha é simples e provavelmente você fez de cabeça, mas vamos relembrar alguns detalhes, ok? Ali embaixo você vê que tanto 113 quanto 8 são as chamadas parcelas. Se você puxar lá do fundo da memória vai lembrar da frase "a ordem das parcelas não altera a soma", ou seja, tanto faz se é 113 + 8 ou 8 + 113, o resultado será o mesmo, 121 livros, desde que você coloque unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena, lembra disso? Ah, não se esqueça que, em casos em que a soma ultrapassa o número 9, devemos colocar a dezena na reserva, ok? Dá uma olhada na resolução:



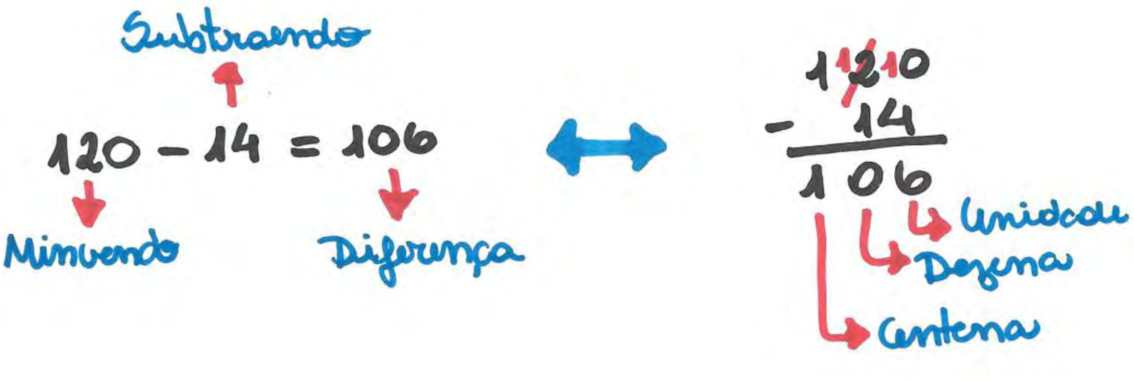
SUBTRAÇÃO DE NATURAIS

É a diminuição de algo em relação a outra coisa.

- ✓ **Exemplo:** Em um fim de semana, você e seus amigos tiraram 120 fotos. Dessas, 14 ficaram desfocadas, tornando impossível identificar cada um. Quantas foram as fotos que ficaram boas para vocês poderem compartilhar e marcar uns aos outros?

De novo, temos uma continha simples que você deve ter resolvido com facilidade. Mesmo assim, vamos relembrar como essa conta seria montada e os nomes de cada elemento. Antes, a ordem dos números não importava, mas aqui ela é essencial! O problema está nos dizendo que vocês fizeram 120 fotos, mas que 14 não ficaram boas e pergunta quantas são "usáveis". Então, precisamos diminuir 14 de 120 – e não 120 de 14, certo? Por isso, 120 é o chamado minuendo e 14 é o subtraendo (o que será subtraído do minuendo).

Percebe como a ordem é importante? O resultado disso será 106 fotos, que é a diferença entre os primeiros números. Outro detalhe que você precisa lembrar é que, quanto temos, na unidade do minuendo, por exemplo, um número menor do que o da unidade do subtraendo, devemos "pegar emprestado do número vizinho" – da dezena, no caso – e resolver a conta normalmente. Dá uma olhada na resolução aí.

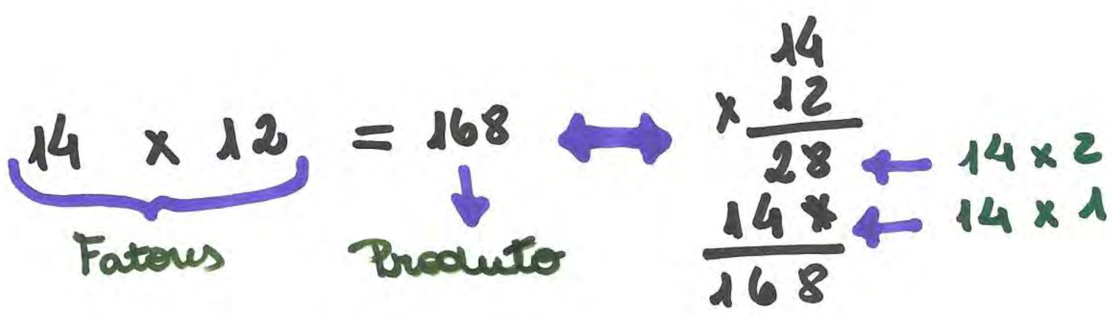


MULTIPLICAÇÃO DE NATURAIS

Essa operação é uma forma mais fácil de realizarmos várias somas. Então, se queremos saber o resultado de 2 + 2 + 2, podemos, simplesmente, fazer 2 x 3, já que estamos somando o 2 três vezes, e obteremos o mesmo resultado. Exemplo: Sua mãe comprou 14 pacotes de bolacha com 12 unidades cada para uma reunião. Ela pediu que você contasse quantas bolachas foram adquiridas ao todo, para saber se precisava comprar mais. Você, como é muito esperto, em vez de contar cada uma das unidades, lembrou que pode fazer uma multiplicação entre a quantidade de pacotes e de bolachas, obtendo o resultado de 168 bolachas.

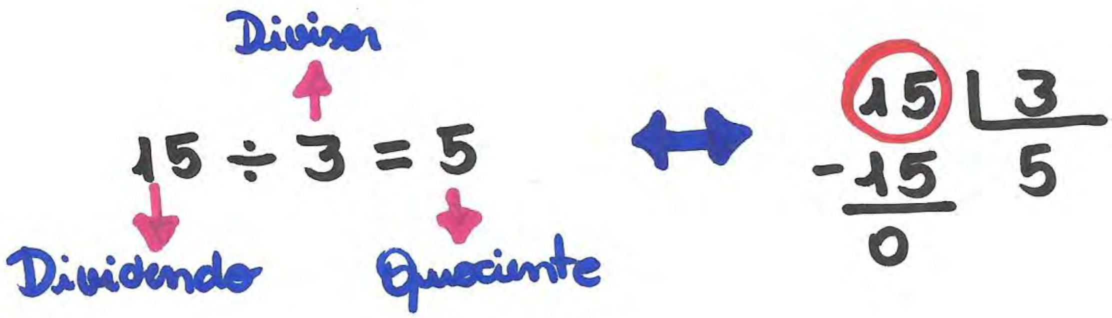
Perceba que, assim como na adição, na multiplicação a ordem dos números, que agora são chamados fatores, não importa. Podemos fazer 12 x 14 ou 14 x 12 que obteremos 168 como produto, certo? Outro detalhe que você precisa relembrar é como é montado o cálculo para conseguir resolver a conta à mão.

Então, montando a conta com um fator em cima do outro, iniciamos o cálculo pela unidade do fator de baixo, multiplicando todo o fator acima; em seguida o mesmo procedimento deve ser realizado para a dezena (e para centena e milhar, se for o caso). Por fim, os resultados dessas multiplicações são somados e obtemos o produto. Relembre o procedimento repetindo a resolução abaixo.



DIVISÃO DE NATURAIS

Essa é a operação que permite dividir alguma coisa por algo e não o contrário. Como assim? Vamos ver no exemplo. Exemplo: Você tem 15 pares de sapatos e 3 prateleiras para acondicioná-los. Quantos sapatos você terá que guardar em cada prateleira? Outra forma de interpretar esse problema é pensando que você tem 15 sapatos para dividir em 3 prateleiras. Perceba que, novamente, a ordem importa. Nesse caso, 15 é o dividendo e 3 é o divisor. Resolvendo isso teremos que o resultado, 5, é o quociente. Veja a resolução abaixo e relembre como é que se monta uma conta de dividir. Dentro da “casinha”, a chave, sempre vai o divisor; abaixo dela vai o quociente. Lembre que, em geral, dividimos cada um dos algarismos do dividendo pelo divisor, a menos que o algarismo seja menor do que o divisor. Nesse caso é necessário utilizar o algarismo ao lado, para que o número seja maior do que o divisor. Lembra disso? Ótimo! Repete esse cálculo para treinar e deixar tudo bem claro e fresco na cabeça, ok?



MDC, MMC E OS NÚMEROS PRIMOS

Ao planejar a sua festinha de aniversário, você teve a ideia de distribuir, na saída, cartões de agradecimento pela presença dos convidados. Para fazê-los, você pediu que sua mãe comprasse pedaços de papel de mesmo comprimento, mas com duas cores diferentes. Ao abrir as embalagens, você percebeu que ela acabou comprando o pedaço de papel azul com 60 cm de comprimento e o pedaço de papel vermelho de 48 cm de comprimento. Para que não sobre papel e para que os cartões sejam iguais, qual deverá ser o comprimento máximo de cada cartão?

Para resolver esse problema, precisamos da ajuda do chamado MDC, ou Máximo **Divisor** (ou Denominador) Comum, já que nosso objetivo é **dividir** os papéis para formar os cartões. Acompanhe:

MÁXIMO DIVISOR (OU DENOMINADOR) COMUM – MDC

O MDC envolve a análise entre os divisores (naturais) de dois ou mais números, buscando sempre o maior deles. Como assim? Vamos analisar os divisores dos números citados no problema acima:

- ✓ O número 60 é divisível por: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
- ✓ O número 48 é divisível por: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

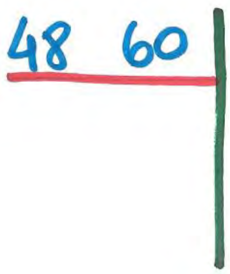
Os números 60 e 48 têm os seguintes divisores em comum: 1, 2, 3, 4, 6, 12, certo? Mas o maior deles é o 12. Então, o MDC de 60 e 48 é 12. A notação adequada é: MDC (60, 48) = 12. Então, o comprimento máximo de cada cartão deve ser de 12 cm.

Beleza! Mas e se você tivesse pedaços de 1024 cm e 1256 cm para fazer o mesmo trabalho, teria que calcular cada um dos divisores dos números e depois fazer as comparações? Claro que não! A matemática está aqui para facilitar a nossa vida! Para resolver problemas maiores, podemos utilizar os números primos, lembra deles?

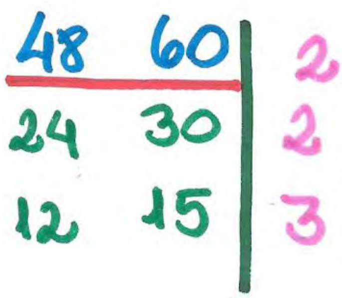
NÚMEROS PRIMOS

São os números que são *divisíveis por **eles mesmos** e por **1**, apenas*. Alguns exemplos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 e por aí vai. Para saber se o número é primo ou não, é necessário analisar quais são seus divisores. Em geral, esses que foram expostos são os que você vai utilizar, mas é bom saber como identificá-los, ok? Por exemplo, o número 7 você consegue dividir por 7, que resulta em 1 e por 1, que resulta em 7. O número 13 é possível dividir por 13, resultando em 1 e por 1, resultando em 13. Isso, de o número ser divisível por ele mesmo e por 1 sempre vai acontecer quando o número é primo. Então, sempre que você precisar identificar um número primo é necessário fazer esse tipo de "teste".

Agora que já relembramos o que e quais são alguns números primos, vamos aplicar esses conhecimentos na resolução do MDC. Monte um esqueminha como esse:



À direita da linha verde, você escreverá o primeiro número primo que pode dividir AMBOS os números; abaixo da linha vermelha você escreverá o resultado dessa divisão. Esse procedimento será repetido até que não seja mais possível dividir os números *simultaneamente* por um primo:



Depois desse procedimento, nosso interesse está nos números à direita da linha verde: ao multiplicá-los, chegaremos ao MDC dos números 48 e 60: 2 x 2 x 3

= 12. Exatamente o mesmo resultado que obtivemos anteriormente, de uma forma bem mais simples, certo?

Exercício 1: Quantos números primos há entre 50 e 80?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

Correta: C

Depois da sua festa, como você bebeu muito refrigerante gelado, acabou ficando doente, com muita dor de garganta. Seu médico receitou os remédios A, B e C, mas o remédio A deve ser tomado a cada 3 horas, o remédio B a cada 8 horas e o remédio C a cada 12 horas. Na primeira dose você tomou os três remédios juntos e depois seguiu as ordens médicas, precisando tomar os remédios em horários diferentes uns dos outros. Será que haverá um novo horário em que você conseguirá tomar novamente todos os remédios juntos, sem falhar o tratamento?

Para resolvermos esse problema, precisamos relembrar um velho conhecido que sempre acaba retornando, o MMC.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM - MMC

Novamente, essa técnica é aplicada em dois ou mais números, porque não faz sentido fazer o MMC de um número apenas (perceba que existe o "comum" no nome), para saber qual é o menor número múltiplo entre eles. Parece esquisito, mas veja como é simples:

- ✓ São múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...
- ✓ São múltiplos de 8: 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...
- ✓ São múltiplos de 12: 0, 12, 24, 36, ...

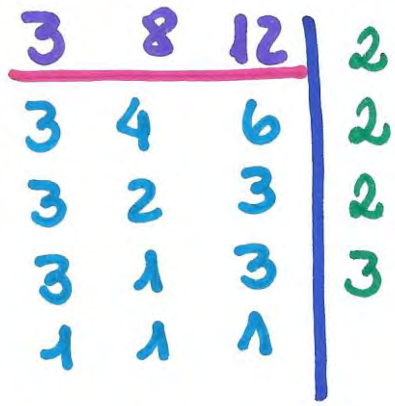
Perceba que o zero sempre é múltiplo do número, mas ele é desconsiderado na hora em que analisamos qual é o menor múltiplo entre os números, senão seria sempre zero, o que não resolveria nosso problema. No caso acima, além do zero, o próximo múltiplo encontrado em todos os casos é o número 24, certo? Esse é, portanto, o MMC de 3, 8 e 12, formalmente descrito por MMC (3, 8, 12) = 24. Então, você tomará novamente os três remédios juntos 24 horas depois da primeira dosagem. Veja na tabela de marcações de horários dos remédios como esse resultado é corroborado.

0h → Remédios A, B, C
3h → Remédios A
6h → Remédio A
8h → Remédio B
9h → Remédio A
12h → Remédios A, C
15h → Remédio A
16h → Remédio B
18h → Remédio A
21h → Remédio A
24h → Remédios A, B, C

O problema foi resolvido, mas, assim como no MDC, o MMC pode ser facilitado a partir da utilização dos números primos. O procedimento é bastante parecido com o que fizemos anteriormente, mas agora não é necessário dividir todos os números ao *mesmo tempo* e o MMC só é obtido a partir do momento em que o quociente é 1 para todos eles. Não entendeu direito? Vamos montar aquele esqueminha de antes utilizando os números do nosso exemplo:

3	8	12	

Vamos iniciar a divisão desses números começando pelo primeiro número possível, o número 2. Como assim? Lembra que não precisamos dividir todos os números simultaneamente no MMC? Então o número 3 é copiado novamente e os demais são divididos, até que seja possível passar para o próximo número primo e dividi-lo por 3 até chegarmos a todos os quocientes iguais a 1. Acompanhe:



O resultado do MMC será o produto entre os números à direita da linha verde: 2 x 2 x 2 x 3 = 24, que é o mesmo resultado que encontramos anteriormente, certo?

Exercício 2: (UFMT - 2013 - COPEL) O MMC e o MDC dos números (20, 18, 6) são, respectivamente:

a) 90 e 4

b) 360 e 4

c) 120 e 2

d) 180 e 2

e) 240 e 2

Correta: D

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

POTENCIAÇÃO

Imagine se tivéssemos 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 x 5, ou um número ainda maior, no lugar de termos como o MMC de um número 2 x 2 x 2 x 3. Seria bastante perigoso reescrever esses números sem esquecer de um deles, né? Novamente, a nossa Matemática, queridona, tem uma solução para nos ajudar a não cometer esse tipo de equívoco utilizando uma “nova” operação, a potenciação.

Podemos agrupar números iguais indicando o número de vezes que eles se repetem no *expoente*. Os cálculos do exemplo ficariam:

- ✓ $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$ ou $2^3 \times 3 = 24$
- ✓ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^8 \times 3^3 \times 5^1 = 2^8 \times 3^3 \times 5^1 =$ 34560

Fique atento! O cálculo não é 2 x 3, mas 2^3 (lê-se 2 ao cubo, ou 2 elevado à terceira potência). Esse erro é muito comum. Veja a diferença:

- ✓ $2 \times 3 = 6$
- ✓ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

CASOS PARTICULARES EM POTENCIAÇÃO

- ✓ **Expoente 1:** Como já foi mencionado, o expoente é o número de vezes que o número está sendo multiplicado. Qualquer número multiplicado por 1 tem como resultado ele mesmo. Além disso, o número 1 pode ser omitido no expoente.

- ✓ **Expoente zero:** Aqui as coisas ficam um pouco mais esquisitas. Isso porque qualquer número diferente de zero elevado ao expoente 0 tem como resultado 1. Por exemplo: $1^0 = 1$, $25^0 = 1$, $368^0 = 1$ e assim por diante. Não está convencido? Veja a explicação para isso no Apêndice dessa apostila.

POTÊNCIA DE BASE 10

Temos que um número é elevado a um expoente. Esse número é chamado de base. Então, se tivermos uma base 2 e um expoente 3, chegaremos a conclusão de que o cálculo é 2^3. Quando temos uma base 10, a conta fica ainda mais fácil, já que o número indicado no expoente é o número de zeros que acompanhará o 1 no resultado. Por exemplo: $10^2 = 100$, $10^4 = 10000$, $10^7 = 10000000$. A potência de 10 é utilizada principalmente para expressar números muitos grandes ou muito pequenos e é chamada de notação científica. Por exemplo, o número 70000000 pode ser reescrito como 7 x 10000000, mas vimos que 10000000 é 107, então 70000000 pode ser reescrito como 7 x 107. Um número muito pequeno, como 0,000007 também pode ser reescrito em notação científica. Veja:

$$0{,}000007 = \frac{7}{1000000}$$

E já sabemos que reescrever o denominador em potência de 10 (veja que são 6 zeros):

$$\frac{7}{10^6}$$

Se invertermos a operação, ou seja, se no lugar de uma divisão preferirmos uma multiplicação, lembre o que expoente deve mudar de sinal também. Então, teremos:

$$\frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

O número absoluto do expoente indica quantas casas decimais são "andadas". Veja os exemplos:

No caso de expoente positivo, apenas escrevemos o número que vem à frente da potência de dez e escrevemos o número de zeros que corresponde ao expoente.

$$7 \times 10^7 = 7\underbrace{0000000}_{7\ \text{casas}}$$

No caso de expoente negativo a dica é contar o número de casas a partir do lado direito do 7 (perceba que podemos escrever 7,0 x 10-6 e então a vírgula anda o número de casas indicadas).

$$7 \times 10^{-6} = 0{,}\underbrace{000007}_{6\ \text{casas}}$$

Você encontrará notação científica em problemas tanto de matemática quanto de física, química e biologia, por isso é interessante saber e se acostumar a utilizá-la.

Perceba que o sinal positivo no expoente descreve números maiores do que zero (107 = 10000000 que multiplicando 7 resulta em 70000000, maior do que zero) e o sinal negativo números menores do que zero (afinal, teremos que 10-6 = 0,000001 que multiplicando 7 resulta em 0,000007, menor do que zero).

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

- ✓ **Multiplicação de potências:** Quando temos uma multiplicação de potências com as bases iguais, basta manter a base, somar os expoentes e resolver o cálculo. Por exemplo: $3^3 \times 3^2 = 3^{(3+2)} = 3^5 = 243$. Caso as bases sejam diferentes, esse procedimento **não** é possível, ok?

- ✓ **Divisão de potências:** No caso da divisão de potências de *bases iguais*, devemos manter a base e subtrair os expoentes. Por exemplo: $3^3 : 3^2 = 3^{(3-2)} = 3^1 = 3$. De novo, perceba que as bases devem ser iguais para que esse cálculo seja feito.

- ✓ **Potência de potência:** O cálculo de $(3^3)^2$ parece muito apavorante, né? Mas é bastante simples; basta que os expoentes sejam multiplicados e que a base seja mantida. No caso mencionado, teremos $3^{(3 \times 2)} = 3^6 = 729$. Beleza?

Exercício 3: (IBMEC - 2005) Os astrônomos estimam que, no universo visível, existem aproximadamente 100 bilhões de galáxias, cada uma com 100 bilhões de estrelas. De acordo com estes números, se cada estrela tiver, em média, 10 planetas a sua volta, então existem no universo visível aproximadamente

a) 10^{12} planetas

b) 10^{17} planetas

c) 10^{23} planetas

d) 10^{121} planetas

e) 10^{220} planetas

Correta: C

RADICIAÇÃO

Anteriormente, vimos que a potenciação é uma operação. Como toda a operação, ela tem uma inversa. A inversa da adição é a subtração, da multiplicação é a divisão e da potenciação é a radiciação. Relembraremos o símbolo chamado “raiz”, no qual colocamos o índice e o radicando:

Vamos analisar as operações abaixo:

- ✓ $2^2 = 4$, então: $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$. Perceba que, quando índice é 2, ele pode ser omitido da raiz.

✓ $2^3 = 8$, então: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Outra forma de resolver problemas de radiciação sem ter os números “decorados” é realizando decomposição deles, como se fosse um MMC com apenas um número. Veja os exemplos abaixo:

Para resolver $\sqrt{4}$, vamos decompor o número 4 em números primos:

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2^2 \end{array}$$

O resultado nós colocaremos no radicando: $\sqrt[2]{2^2}$. Note que o índice da raiz é igual ao expoente do radicando e por isso eles podem ser simplificados e assim os “livramos” da raiz. Veja:

$$\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} = 2$$

E então teremos que:

$$\sqrt{4} = 2$$

Mesmo resultado que obtivemos anteriormente. Veja outro exemplo:

Para saber $\sqrt[3]{8}$, vamos decompor o radicando em números primos:

$$\begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2^3 \end{array}$$

Substituindo o resultado na radiciação, teremos $\sqrt[3]{2^3}$. Novamente o índice da raiz e o expoente do radicando coincidem e por isso podemos "cortá-los". Acompanhe:

$$\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} = 2$$

Portanto, o resultado é:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Que é o mesmo resultado que encontramos anteriormente.

Exercício 4: Sabendo que a raiz quadrada de 2 é igual a 1,44 e que a raiz quadrada de 3 é igual a 1,73; calcule o valor da raiz quadrada de 6

a) 3,61

b) 4,61

c) 3,49

d) 5,49

e) 2,49

Correta: E

NÚMEROS NEGATIVOS E AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Até agora, estávamos tratando apenas com números positivos (chamados de números naturais porque pertencem ao Conjunto dos Números Naturais, como veremos mais tarde), mas você sabe que os números negativos estão presentes no nosso cotidiano, como na temperatura abaixo de zero que faz em alguns lugares no inverno ou no saldo da sua conta corrente quando acaba gastando mais do que havia guardado. Juntamente com os positivos e o zero, os números negativos fazem parte do Conjunto dos Números Inteiros.

Vamos recapitular todas as operações anteriores para os casos em que trabalhamos com números negativos. Fique tranquilo, é só ter atenção com o sinalzinho que vem antes do número. =D Vou deixar um esqueminha que vale para operações de multiplicação e de divisão pra você não se confundir mais:

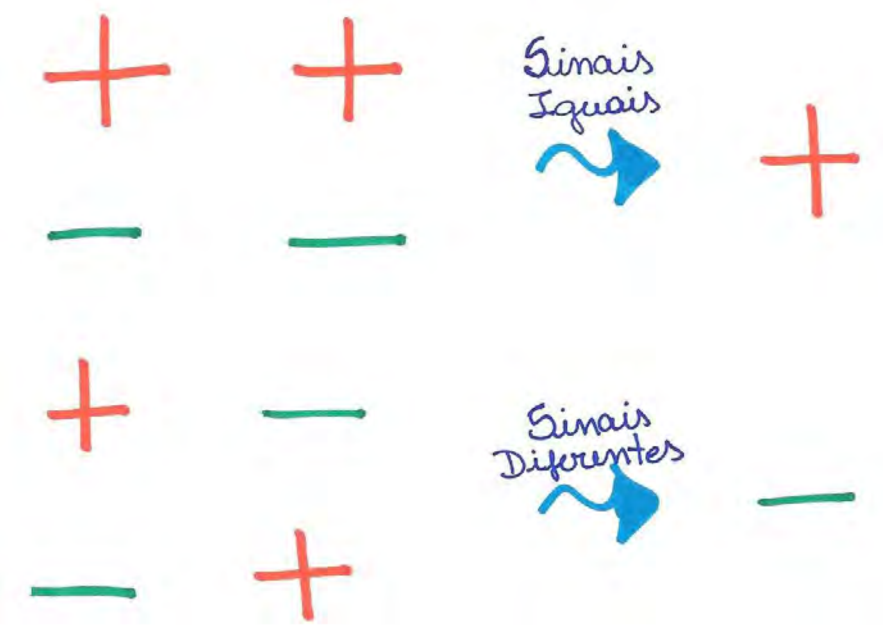


IMAGEM 1: ESQUEMA DE SINAIS.

É bem fácil se você lembrar que os **iguAIS dão mAIS**, e que o restante é o contrário, certo? Outra dica é: não economize parênteses. Com eles é muito mais fácil enxergar essas relações.

ADIÇÃO DE NATURAIS

A soma de dois números negativos resulta em um número negativo. Já a soma de um número negativo com um número positivo vai depender do módulo desses números. Veja os exemplos:

- **Dois números negativos:** Você estava devendo 10 reais para o seu irmão e pediu mais 12 reais para ele. Quanto você está devendo (sinal de menos) para o seu irmão?

$$(-10) + (-12) = -22$$

Você está devendo 22 reais. Perceba que o sinal de menos representa o saldo devedor, ou saldo negativo.

- **Um número negativo e um positivo**: Você decide pagar 5 reais da dívida que tem com seu irmão. Estará ainda devendo a ele depois disso?

 |

$$(-22) + (5) = -17$$

Infelizmente você continua devendo ao seu irmão. Dias depois você finalmente recebe e consegue pagar mais 20 reais a ele. Como fica a dívida?

$$(-17) + (20) = 3$$

Não há mais dívida! E você ainda deu 3 reais a mais. Outra forma de interpretar isso é que você ficou com um saldo de 3 reais com o seu irmão que foi superlegal em te emprestar o dinheiro.

SUBTRAÇÃO DE INTEIROS

Um número negativo menos outro número negativo é transformado em uma adição, mantendo o sinal negativo. Um número negativo menos um número positivo continua sendo uma subtração. Dá uma olhada:

- ✓ **Dois números negativos**: fazer a subtração de dois número negativos é equivalente a somar um número negativo com outro positivo. Lembra que *sinais iguais resultam em mais*:

$$(-2) - (-10) = -2+10 = 8$$

- ✓ **Um número negativo e um positivo:** em um dia, a temperatura da cidade que você foi visitar no inverno era de -2° C. Mais tarde, você ouviu dizer que a temperatura tinha diminuído ainda 1°C.

$$(-2) - (1) = -2-1 = -3$$

MULTIPLICAÇÃO DE INTEIROS

Aqui a regrinha dos sinais aparece mais nitidamente. Vamos ver em detalhes:

- ✓ **Dois números negativos**: Lembre que a multiplicação entre dois números negativos resulta em um número positivo:

$$(-2).(-3) = 6$$

- **Um número negativo e um positivo:** Você está novamente com uma dívida de 5 reais (acho que você deveria tomar cuidado com isso, viu?) e a pessoa para quem você está devendo dobrou esse valor porque você estava demorando a pagar. Quanto você deve agora?

$$(2).(-5) = (+2).(-5) = -10$$

Você deverá 10 reais. Lembre que sinais diferentes acarretam em sinal negativo, certo?

DIVISÃO DE INTEIROS

Siga o mesmo raciocínio dos exemplos anteriores. Lembre que a divisão é o inverso da multiplicação.

- **Dois números negativos:** Quando dividimos um número negativo por outro número negativo, o resultado é positivo.

$$(-20) \div (-5) = (-20) \div (-5) = 4$$

- **Um número negativo e um número positivo:** Quando temos sinais diferentes entre os números, o resultado é negativo.

$$(-20) \div (2) = (-20) \div (+2) = -10$$

POTENCIAÇÃO DE INTEIROS

Lembre que a potenciação é o resultado de várias multiplicações agrupadas, então aqui valem as mesmas regras da multiplicação, mas temos alguns macetes:

- **Quando a base é negativa e o expoente é par**: o resultado sempre será positivo.

$$(-2)^2 = (-2).(-2) = 4$$

- **Quando a base é negativa e o expoente é ímpar**: o resultado sempre será negativo.

$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = (4).(-2) = -8$$

RADICIAÇÃO DE INTEIROS

Esse é um assunto delicado. Por enquanto, peço que você aceite que não há essa operação com números negativos. Quando você tiver um pouco mais de "maturidade" matemática, vamos voltar a esse assunto, ok? Então, até lá, se aparecer raiz de número negativo, não existe!

FRAÇÕES, NÚMEROS DECIMAIS E AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Provavelmente você já gabaritou alguma prova ou trabalho e lá estava ela, a nota 10 estampada na capa. Que coisa maravilhosa! Mas imagino que você também já tenha chegado muito perto do 10, tirando 9,5 ou 9,8 ou qualquer outra nota "quebrada", certo? E se você tirou 9,8, provavelmente foi dar aqueeela "chorada" com o professor para arredondar a nota para 10, afinal, foram só 2 décimos, né? Se você não fez isso, já presenciou essa situação com algum colega fazendo. Mas o que são esses 2 décimos? Por que, quando aparece algum problema que envolva números "quebrados", você fica apavorado, se toda vez que você vai ao mercado tem que lidar com eles?

Esses números com vírgula, que chamaremos a partir de agora de números decimais, fazem parte do Conjunto dos Números Racionais. Perceba que antes tínhamos os números inteiros, então, agora temos os *não inteiros*, que são resultado de divisões não exatas. Como assim? Você deve se lembrar que frações são sinônimos de divisões, certo? Então, veja só:

numerador → 2
denominador → 1

$$\frac{2}{1} = 2 = 2{,}0$$

Perceba que o 1 do denominador pode ser omitido, já que o resultado da divisão de qualquer número por 1 é ele mesmo. Além disso, podemos omitir a vírgula seguida de zero, já que estamos tratando com um número inteiro. Agora veja este outro caso:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

Aqui não temos uma divisão exata, tanto que pode-se ler o resultado como "meio", certo? O que há depois da vírgula é uma informação importante, portanto, não pode ser omitida. Perceba que há uma relação direta entre frações e números decimais. Muitas vezes é necessário transformar um em outro para que possamos facilitar a resolução dos problemas. É por isso que agora veremos as peculiaridades de cada caso quando realizamos operações com eles.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES E DECIMAIS

Vamos abordar essas operações no mesmo tópico porque não há diferença nos procedimentos, a não ser, é claro, o sinal. A grande dica para realizarmos esses cálculos com números decimais é lembrar de organizá-los de maneira correta: vírgula embaixo de vírgula, respeitando unidade, dezena, centena, milhar, etc. Acompanhe:

$$\begin{array}{r} 20{,}5 \\ +\ \ 1{,}25 \\ \hline 21{,}75 \end{array}$$

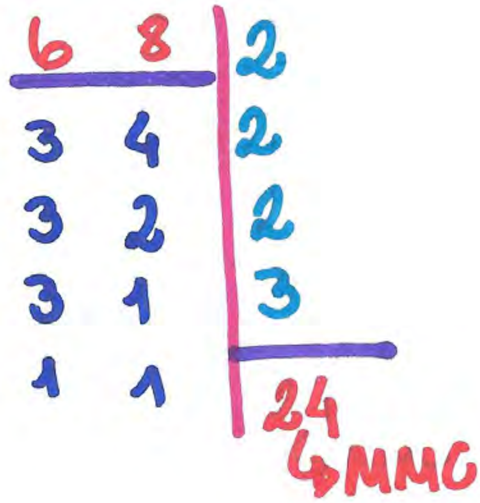
Podemos somar duas ou mais frações se elas tiverem o mesmo denominador. Nesse caso, o denominador é mantido e os numeradores são somados:

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

Ok. E se eu tiver uma soma (ou subtração) de frações com denominadores diferentes não vou poder resolver a conta? Claro que vai! Foi por isso que nós estudamos o MMC anteriormente. Ele vai ser o nosso salva-vidas aqui! Preste atenção no procedimento: vamos fazer o MMC entre os denominadores, em seguida dividiremos o resultado do MMC pelo primeiro denominador e multiplicaremos o resultado pelo primeiro numerador, e faremos o mesmo com a segunda fração. Parece chato no início, mas você pega o jeito se treinar algumas vezes. Traduzindo:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{MMC\div(6).(1)\ \ +MMC\div(8).(3)}{MMC}$$

Vamos fazer, antes de mais nada, o MMC de 6 e 8:



Agora que sabemos que o MMC é 24, podemos voltar e resolver a soma de frações de denominadores diferentes:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{(24 \div 6).(1)\ +\ (24 \div 8).(3)}{24}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{(4).(1)\ +\ (3).(3)}{24}=\frac{4\ +\ 9}{24}=\frac{13}{24}$$

Depois de um pouco de suor, chegamos ao resultado. Se você treinar, vai ver que daqui a pouco nem precisa mais pensar muito e vai fazer no automático.

Exercício 5: O resultado da adição de 3/8 + 1/2 + 7/4 é:

a) 11/14

b) 11/8

c) 11/16

d) 21/8

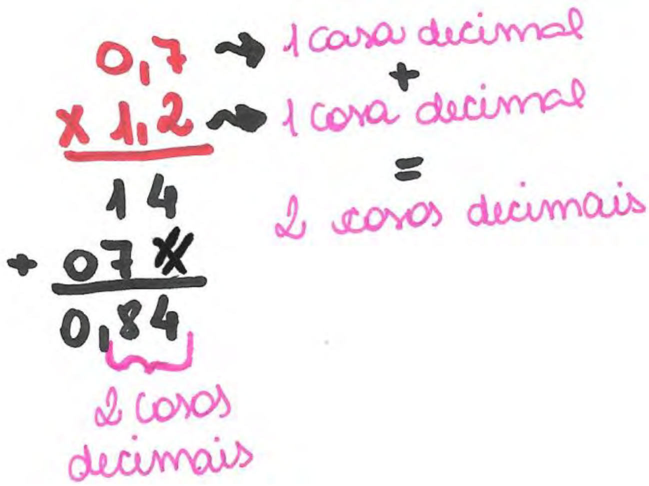
e) 21/4

Correta: D

 |

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES E DECIMAIS

O segredo da multiplicação com números decimais é saber contar as casas decimais. Como assim? A multiplicação de números decimais deve ser realizada normalmente, respeitando a disposição da vírgula. Para saber onde deve ser colocada a vírgula no resultado é necessário contar quantas casas decimais há nos fatores. Veja o exemplo:



Nada tão complicado, certo? É só lembrar de contar as casas decimais e colocar a vírgula no lugar certo.

A multiplicação de frações é muito simples. Basta multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador. Veja:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{(2).(1)}{(5).(3)} = \frac{2}{15}$$

DIVISÃO DE FRAÇÕES E DECIMAIS

A chave para fazer a divisão de números decimais é *sempre ter o mesmo número de algarismos depois da vírgula*, ou seja, ter o mesmo número de casas decimais. E se os números não tiverem o mesmo número de casas decimais é impossível dividir? Claro que não! Se esse for o caso, a gente adiciona casas decimais ao número que precisa (com zeros). Acompanha:

$3,6 \,\lfloor 3$ → Deixar o divisor e o dividendo com o mesmo número de casas decimais → $3,6 \,\lfloor 3,0$ → Ignorar as vírgulas e realizar a divisão normalmente →

$$\begin{array}{r|l} 36 & 30 \\ \hline -30 & 1,2 \\ \boxed{6\,0} & \\ -60 & \\ 0 & \end{array}$$

Lembre-se que, quando é necessário "inventar" um zero para finalizar o cálculo, você precisa colocar uma vírgula no quociente, ok?

Beleza! Para fazer a divisão entre duas frações basta que a segunda fração seja invertida e, em seguida, que elas sejam multiplicadas. Dá uma olhada no exemplo:

$$\frac{3}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 2} = \frac{15}{4}$$

Troca o numerador pelo denominador

Simples, né? Nada de se apavorar se aparecer uma conta desse tipo, ok?

Exercício 6: Fernando come 1/5 de barra de chocolate por dia. Ao fim dos 30 dias do mês, terá comido:

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

Correta: A

POTENCIAÇÃO DE FRAÇÕES E DECIMAIS

A potenciação com números decimais ocorre como nos números inteiros: basta multiplicar a base pelo número indicado no expoente, lembrando da regra de multiplicação de números com vírgula.

$$0,4^2 = 0,4.0,4 = 0,16$$

É importante lembrar, ao realizar potenciação de frações, que tanto o numerador quanto o denominador devem ser elevados ao expoente indicado, se ele estiver fora dos parênteses. Veja:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) = \frac{1}{4}$$

Perceba que no exemplo acima o expoente está fora dos parênteses. Agora veja o outro exemplo:

$$\left(\frac{2^2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Nesse caso, apenas o numerador está sendo elevado à segunda potência. Preste bastante atenção nisso, ok?

Exercício 7: A metade de 2^{24} é:

a) 1^{24}

b) 2^{12}

c) 1^{12}

d) 2^{23}

e) 2^{20}

f) Correta: D

RADICIAÇÃO DE FRAÇÕES E DECIMAIS

Quando realizamos a radiciação de números decimais devemos aplicar os mesmos conhecimentos de quando executamos essa operação ao números naturais. Também é possível "transformar" um número decimal em uma fração, e assim fazer a radiciação. Veja o exemplo abaixo:

$$\sqrt{0{,}64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{8^2}{10^2}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Fica mais fácil fazer esse tipo de conta, certo? Perceba que é totalmente verdade, já que:

$$0{,}8^2 = 0{,}64$$

Assim como na potenciação, na radiciação você precisa prestar atenção na abrangência da raiz, ou seja, se a raiz é de toda a fração ou só do numerador ou do denominador, ok? Veja a diferença abaixo:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \neq \frac{\sqrt{4}}{9} = \frac{2}{9}$$

Muito cuidado, tá bom?

Outro detalhe que é importante você gravar é que uma radiciação pode ser escrita como uma potenciação. Como assim? Dá uma olhada:

$$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4^1} \Longleftrightarrow 4^{\frac{1}{2}}$$

Lembre-se: quando omitimos o índice, fica subentendido que ele vale 2; quando omitimos o expoente, fica subentendido que é 1. Essa "transformação" pode ser feita utilizando outros números como índice e expoente, e é bastante comum utilizarmos essa relação para facilitar a resolução de um problema. Então, guarde bem isso, ok?

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Nas seções anteriores nós falamos sobre números naturais, aqueles que conseguimos contar com os dedos das mãos, como 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc; números inteiros, os negativos, o zero, e os positivos; números racionais, como os fracionários ou decimais. Cada um desses "tipos" de números é chamado de conjunto e é possível agruparmos esses conjuntos em um diagrama. Vamos analisar e construir um diagrama.

NÚMEROS NATURAIS

Como já vimos, são aqueles que conseguimos contar com os dedos das mãos.

$$N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

NÚMEROS INTEIROS

Englobam os números naturais e os números negativos.

$$Z = \{\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

NÚMEROS RACIONAIS

São os números fracionários ou decimais e englobam os dois anteriores, já que, por exemplo, 1 pode ser reescrito como 1,0. Além disso, também temos números fracionários ou decimais negativos, certo?

$$Q = \{\ldots,\ -3{,}5,\ -3,\ -2{,}5,\ -2,\ -1{,}5,\ -1,\ 0{,}5,\ 0,\ 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5,\ 3,\ 3{,}5,\ \ldots\}$$

NÚMEROS IRRACIONAIS

São os números com casas decimais infinitas, que não são exatos e, portanto, não conseguimos representá-los por frações. Além disso, esse é o conjunto que fica separado dos outros e faz parte apenas dos Reais, que veremos em seguida.

$$I = \{e\ ;\ \sqrt[3]{5}\ ;\ \pi\}$$

NÚMEROS REAIS

É o conjunto que engloba todos os conjuntos anteriores. Para tentar facilitar o entendimento, dá uma olhada no diagrama abaixo:

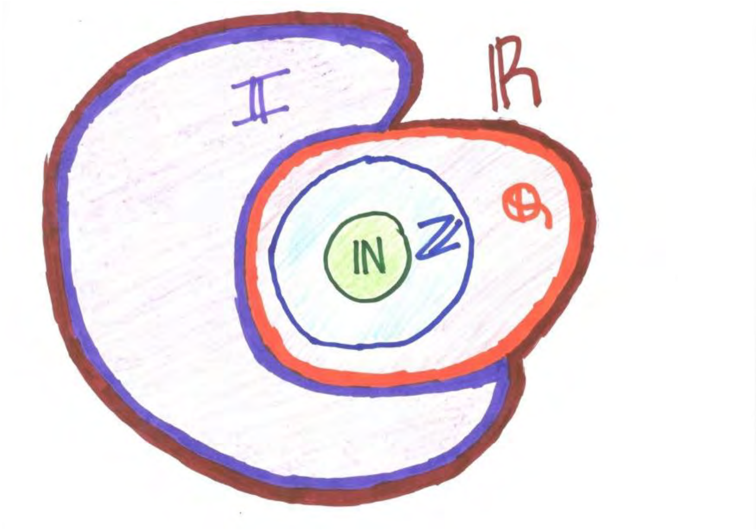


IMAGEM 2: DIAGRAMA DE CONJUNTOS NUMÉRICOS.

Exercício 8: (UFV) Considere as afirmações a seguir:

(I) O número 2 é primo.

(II) A soma de dois números ímpares é sempre par.

(III) Todo número primo multiplicado por 2 é par.

(IV) Todo número par é racional.

(V) Um número racional pode ser inteiro.

Atribuindo V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, assinale a sequência CORRETA:

a) V, V, V, V, V

b) V, F, V, V, V

c) V, F, V, V, F

d) F, F, V, V, V

e) V, F, V, F, F

Correta: A

COMPLEMENTANDO O ESTUDO: O CURIOSO CASO DO EXPOENTE ZERO

Vimos que qualquer número (diferente de zero) elevado ao expoente zero é igual a 1, mas como isso é possível? Vamos entender melhor a partir dos exemplos abaixo.

Imagine que você tem uma divisão de 23 por 22. Podemos montar essa divisão da seguinte forma:

$$\frac{2^3}{2^2} = \frac{2.\cancel{2}.\cancel{2}}{\cancel{2}.\cancel{2}} = 2$$

Outra forma de fazer isso é utilizando propriedades de potenciação:

$$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

Certo! Mas, e se o expoente do denominador também for 3? Vamos ver o que acontece? Olha que interessante:

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}}{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}} = 1$$

Utilizando a mesma propriedade anterior, vemos nitidamente que, quando temos expoente zero, o resultado é 1:

$$2^{3-3} = 2^0 = 1$$

Interessante, né? =D

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática:** Aula por aula. São Paulo: FTD, 2000. 670 p.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática:** Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

PARTE I

MATEMÁTICA

02

GEOMETRIA PLANA I
FIGURAS ELEMENTARES

meSalva!

GEOMETRIA PLANA I – FIGURAS ELEMENTARES

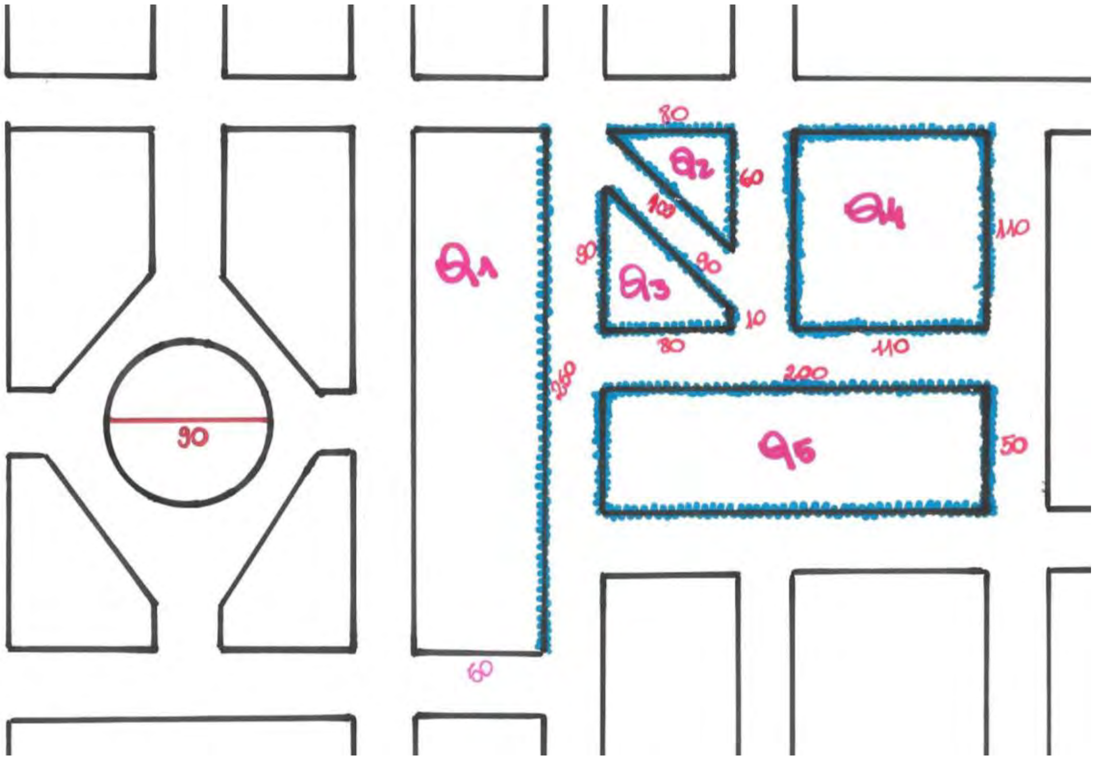
Nessa apostila faremos um estudo sobre o perímetro e as áreas das figuras geométricas planas, como quadrados, triângulos, losangos, círculos, etc. Como este é um campo bastante amplo, o estudo da geometria em duas dimensões foi dividido em três apostilas, para que possamos aprofundar nosso conhecimento e fazer relações entre essas formas. Por enquanto, divirta-se com os conceitos iniciais. Entendendo eles você verá que a geometria plana não é apenas um emaranhado de fórmulas, mas algo que intuitivamente você sabe podendo desenvolvê-la a partir do seu próprio conhecimento.

PERÍMETRO DE FORMAS GEOMÉTRICAS PLANAS

A placa abaixo contém um aviso que informa que naquele local é permitido o estacionamento de automóveis, desde que haja o pagamento de uma tarifa relacionada ao tempo de ocupação da vaga.

Provavelmente você conhece esse sistema, chamado de *Zona* ou *Área Azul*. Dependendo do município em que funciona, a Zona Azul tem como um dos objetivos permitir a ocupação de vagas de estacionamento nas áreas mais movimentadas da cidade por diversas pessoas, gerando maior rotatividade de veículos. Para a implementação desse sistema vários estudos são realizados, como uma pesquisa para saber em qual região as pessoas mais procuram estacionamento, qual a quantidade de veículos que circulam por lá, os horários de maior movimento, etc.

A imagem abaixo mostra parte de um mapa de uma cidade. As linhas sinuosas presentes nas quadras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 demarcam os locais em que se pretende implementar o estacionamento rotativo (Zona Azul) e os números indicam o comprimento das quadras em metros. Considerando que, em média, cada vaga de estacionamento tem 5,50 m de comprimento, quantas delas poderiam ser implementadas de acordo com o planejamento apresentado na figura?



Vendo as quadras de cima, é possível perceber que cada uma delas tem uma forma geométrica. Uma das maneiras de saber a quantidade de vagas é calcular o *perímetro* das quadras, somar todos eles e dividir o resultado pelo tamanho médio das vagas. É bem simples! E fica ainda mais fácil se soubermos que o perímetro é apenas a soma de todos os lados da forma geométrica estudada e a figura fornece os comprimentos de cada um dos lados das quadras. Vamos iniciar as contas a cada quadra separadamente.

- ✓ **Perímetro Q_1:** Perceba que a forma geométrica envolvida aqui é um retângulo de lados com tamanho de 250 m (os dois maiores) e 50 m (os dois menores). Por isso, esse perímetro será P = 250 + 50 + 250 + 50 = 600 m, ou seja, a soma de todos os lados. Mas atenção: Apenas um dos lados faz parte da Zona Azul, um dos lados de 250 m. Então, apesar de o perímetro da Q_1 ser 600 m, o que nos interessa para fins de cálculo é só 250 m, ok?

- **Perímetro Q_2**: Essa quadra é um triângulo retângulo (a seguir veremos com mais detalhes os tipos de triângulo e na apostila de Geometria Plana II). Perceba que o seu perímetro será P = 60 + 80 + 100 = 240 m.

- **Perímetro Q_3:** Aqui temos uma forma chamada de trapézio. Por enquanto, basta sabermos que ela tem 4 lados e somarmos os valores fornecidos na figura para encontrar o perímetro, que será P = 90 + 90 + 80 + 10 = 270 m.

- **Perímetro Q_4:** Essa quadra é um quadrado, já que os lados têm o mesmo comprimento. Assim, o perímetro dela será: P = 110 + 110 + 110 + 110 = 440 m.

- **Perímetro Q_5:** Temos novamente um retângulo. O perímetro dessa quadra é: P = 200 + 50 + 200 + 50 = 500 m.

Agora que já calculamos todos os perímetros, ou seja, a soma de todos os lados de cada uma das quadras, podemos somar todos e dividir pelo tamanho médio das vagas:

$$P_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$
$$P_{total} = 250 + 240 + 270 + 440 + 500$$
$$P_{total} = 1700$$

Lembrando que o tamanho médio das vagas é 5, 5m:

$$\frac{1700}{5,5} = 309,09 \simeq 309 \ vagas$$

Ótimo! Sabemos agora que, nessa região, teremos por volta de 309 vagas para estacionamento rotativo já que não é possível ter 0,09 vagas, certo? É necessário um número inteiro de vagas e por isso realizamos a aproximação de 309 vagas. Podemos explorar um pouco mais essa questão, veja a seguir.

Exercício 1: (FVG) A quantidade de retângulos com lados de comprimento inteiro que é possível formar, tendo sempre um perímetro de 24 cm, é

a) 6 retângulos
b) 12 retângulos
c) 36 retângulos
d) Apenas um retângulo
e) Um número infinito de retângulos

Correta: A

Exercício 2: Sabendo que o perímetro de um hexágono regular é de 42 m, qual o comprimento do seu lado

a) 10 m
b) 7 m
c) 6 m
d) 8 m
e) 9 m

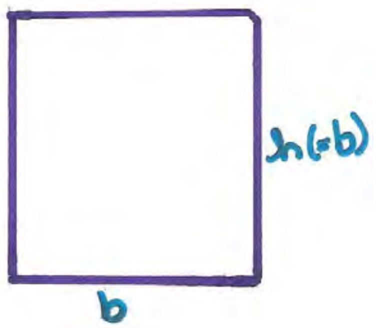
Correta: B

ÁREA DE FORMAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Na seção anterior aprendemos a calcular quanto mede o contorno das formas geométricas planas para saber quantos veículos poderiam ser estacionados em uma determinada região. Mas e se quisermos saber qual é a área delimitada por essas quadras para a construção de imóveis com espaço para calçadas? Para cada forma geométrica há uma "fórmula" que permite saber qual é a área (simbolizada por *A*) delimitada por ela, mas é importante que você saiba que o cerne dessas equações é o mesmo: multiplicação da base (b) da forma pela sua altura (h, vem do inglês, *high = altura*). Além disso, a unidade de medida de área sempre será uma unidade de comprimento ao quadrado (como km^2, m^2, cm^2 etc.), já que tanto a base quanto a altura estarão em uma dessas unidades. Vamos ver a seguir algumas das equações para o cálculo da área das formas geométricas mais comuns.

QUADRADO

Essa forma é composta por 4 lados idênticos. Por isso a altura tem o mesmo tamanho da base e podemos escrever a equação para o cálculo da área das duas formas abaixo.

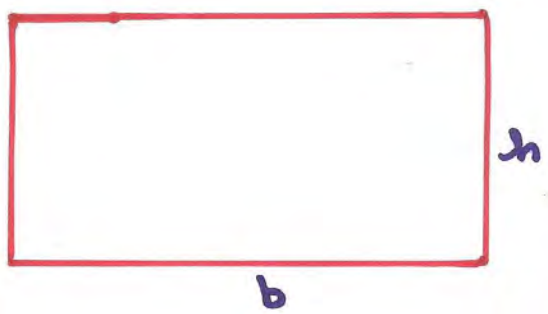


$$A_{quadrado} = b.h$$

$$A_{quadrado} = b^2$$

RETÂNGULO

Também é um quadrilátero (possui quatro lados) e tem dois lados iguais maiores do que os outros dois lados iguais.



$$A_{retângulo} = b.h$$

TRIÂNGULO

Essa forma possui apenas 3 lados, mas eles podem formar figuras diferentes, como triângulo retângulo, triângulo equilátero ou triângulo qualquer. Por isso, é bastante comum que se “decore” três equações diferentes para calcular a área desses triângulos, mas você vai ver que só precisa saber uma.

Triângulo retângulo: É caracterizado por ter um ângulo de 90°. Perceba que, se cortarmos um retângulo na diagonal, teremos dois triângulos retângulos, certo? Então, a área de um triângulo retângulo pode ser calculada a partir da área de um retângulo através da divisão por 2.

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}$$

Outra forma de fazer isso é utilizando o ângulo de 90° formado entre a base e a altura. No decorrer do nosso estudo da matemática você entenderá melhor o porquê do “sen”, mas por enquanto você precisará apenas aceitar algumas partes das equações que seguem. Veja:

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}.sen\ 90°$$

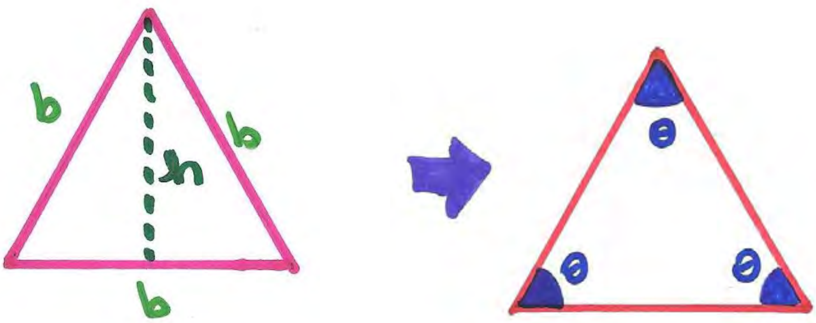
$$sen\ 90° = 1$$

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}.1$$

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}$$

Perceba que chegamos à mesma equação apresentada anteriormente, certo?

Triângulo equilátero: Possui os três lados de mesmo tamanho e, portanto, seus ângulos internos também são iguais. Mais tarde você verá que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é 180°. Isso significa que os ângulos internos de um triângulo equilátero serão sempre 60°. Assim, se não é fornecida a altura da forma, o cálculo da área desse triângulo é baseado no ângulo de 60°.



$$A_{triângulo} = \frac{b.b}{2}.sen\ 60°$$

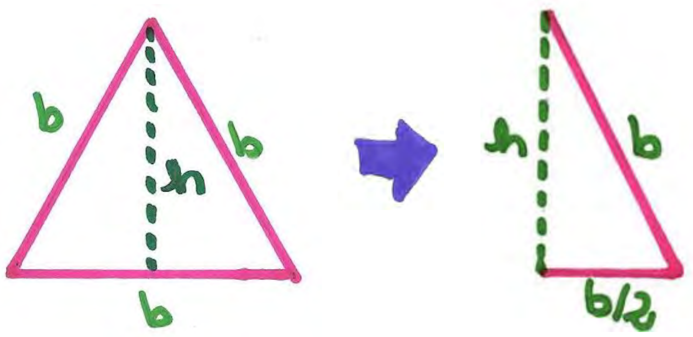
$$A_{triângulo} = \frac{b^2}{2}.sen\ 60°$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

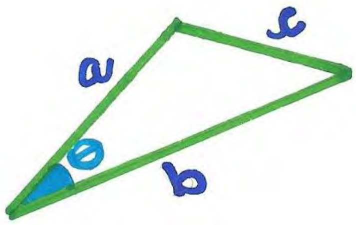
$$A_{triângulo} = \frac{b^2}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{triângulo} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

Se você tiver a informação da altura, é possível realizar o cálculo da área desse triângulo equilátero apenas dobrando a área do triângulo retângulo que ela forma com os outros dois lados.



Triângulo qualquer: Esse triângulo tem lados e ângulos diferentes, mas o raciocínio para o cálculo de sua área é o mesmo de antes: utilizar o ângulo formado entre dois lados conhecidos.



$$A_{triângulo} = \frac{a.b}{2}.sen\ \theta$$

Caso o ângulo fosse formado pelos lados a e c a equação seria:

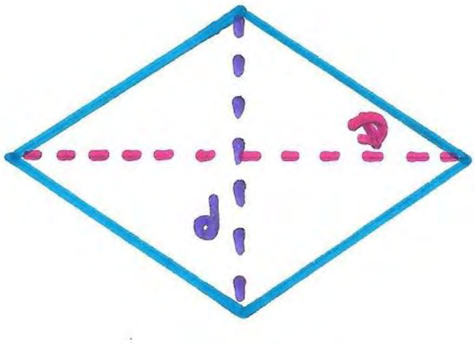
$$A_{triângulo} = \frac{a.c}{2}sen\ \theta$$

Ou pelos lados b e c:

$$A_{triângulo} = \frac{b.c}{2}sen\ \theta$$

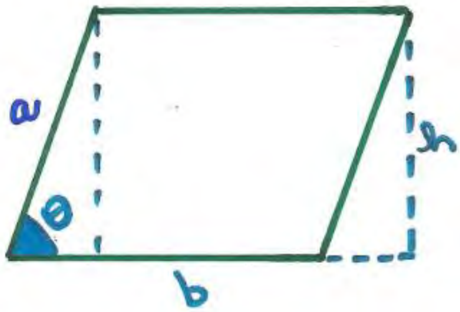
Portanto, basta que você lembre essa última equação para calcular a área de qualquer triângulo! Não é ótimo?

Losango: É também um quadrilátero bastante parecido com um quadrado esticado. Sempre tem uma diagonal maior do que a outra (se não tiver, é um quadrado!). Para saber a área dessa forma, basta multiplicar uma diagonal pela outra e dividir por 2.



$$A_{losango} = \frac{D.d}{2}$$

Paralelogramo: Outro quadrilátero parecido com um retângulo que está sendo "empurrado". Quadrados, retângulos e losangos também são paralelogramos, já que possuem laterais paralelas. Há duas formas de calcular a área dessa figura: uma é conhecendo a altura e a base; a outra é conhecendo dois lados e o ângulo formado entre eles.

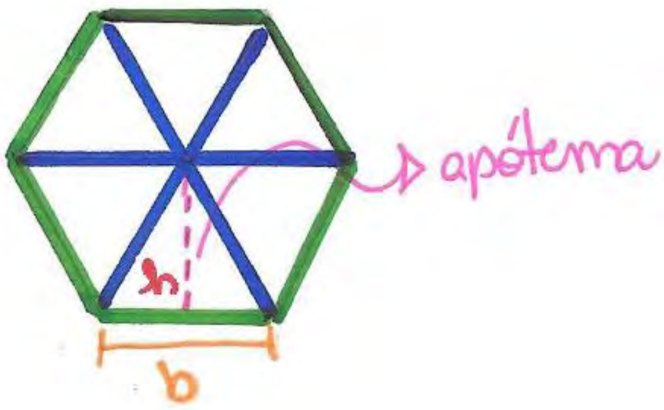


$$A_{paralelogramo} = b.h$$

$$A_{paralelogramo} = a.b.sen\ \theta$$

Trapézio: Quadrilátero formado por duas "bases", uma maior do que a outra, unidas por duas laterais iguais ou não.

Hexágono: É uma forma geométrica de seis lados que possui todos os lados e ângulos internos e externos iguais. Esse tipo de forma é chamado de polígono regular e nesse caso temos um polígono regular de 6 lados (o quadrado também é um polígono regular, mas de quatro lados). Perceba que podemos dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros. Isso significa que, para calcular a área do hexágono, basta multiplicar a área do triângulo equilátero por 6, que é o número de triângulos que o compõem. Note que a *altura* do triângulo é chamada de *apótema* do hexágono e que o *lado*, que é igual à base (já que temos um triângulo equilátero), é chamado de *raio*. Note que o raio é maior do que a altura (apótema). Essa nomenclatura será útil no futuro.



$$A_{hexágono} = 6.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

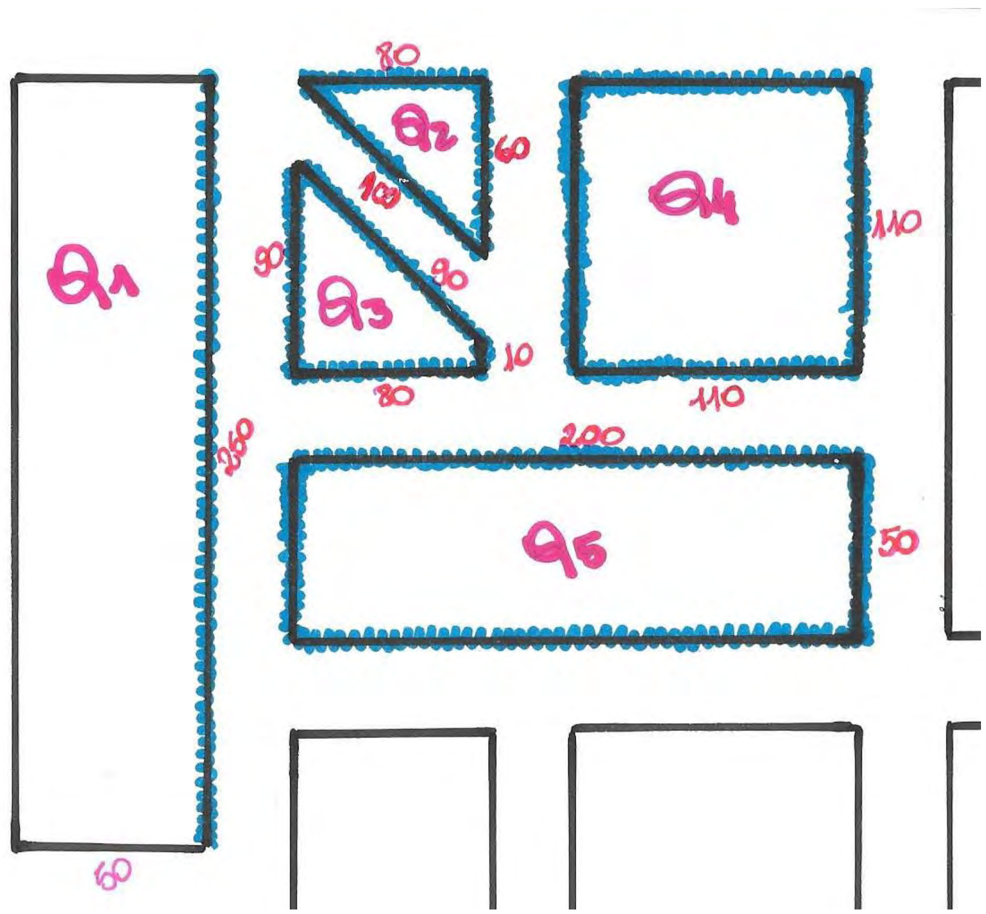
$$A_{hexágono} = 3.\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

Outros polígonos regulares: São as formas geométricas que possuem lados e ângulos iguais, como o hexágono que vimos acima, o pentágono, o octógono, etc. Você não precisa decorar as fórmulas para calcular a área de cada um deles, ok? Podemos utilizar a relação entre perímetro e apótema para isso, que será mais fácil agora que você é craque nesses cálculos:

$$A_{\substack{polígono \\ regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

Lembre que *h* é o apótema (em alguns livros ele é também chamado de *a*), P é o perímetro e *n* é o número de lados do polígono regular.

Agora que sabemos tudo isso, podemos voltar ao nosso problema anterior: qual é a área das quadras que possuem estacionamento rotativo? Vamos relembrar as formas das quadras: Q_1 é um retângulo, Q_2 um triângulo retângulo, Q_3 um trapézio, Q_4 um quadrado e Q_5 é outro retângulo. Vamos calcular cada área separadamente.



- **Q1 – retângulo**: duas laterais valem 250 m e outras duas valem 50 m, então a área é:

$$A_{Q_1} = b.h$$
$$A_{Q_1} = 50.250$$
$$A_{Q_1} = 12500 \ m^2$$

- **Q_2 – triângulo retângulo**: altura vale 60 m e base vale 80 m (vire o triângulo de "cabeça para baixo" para visualizar melhor a base), assim a área dessa quadra é:

$$A_{Q_2} = \frac{b.h}{2}$$
$$A_{Q_2} = \frac{80.60}{2}$$
$$A_{Q_2} = 2400 \ m^2$$

- Q_3 – **trapézio:** a base menor vale 10 m, a maior vale 90 m e a altura é 80 m. Talvez você tenha que torcer um pouco a cabeça para enxergar. ;) Calculando a área, teremos:

$$A_{Q_3} = \frac{h.(B+b)}{2}$$
$$A_{Q_3} = \frac{80.(90+10)}{2}$$
$$A_{Q_3} = 4000 \ m^2$$

- Q_4 – **quadrado:** os lados valem 110 m, então a área é:

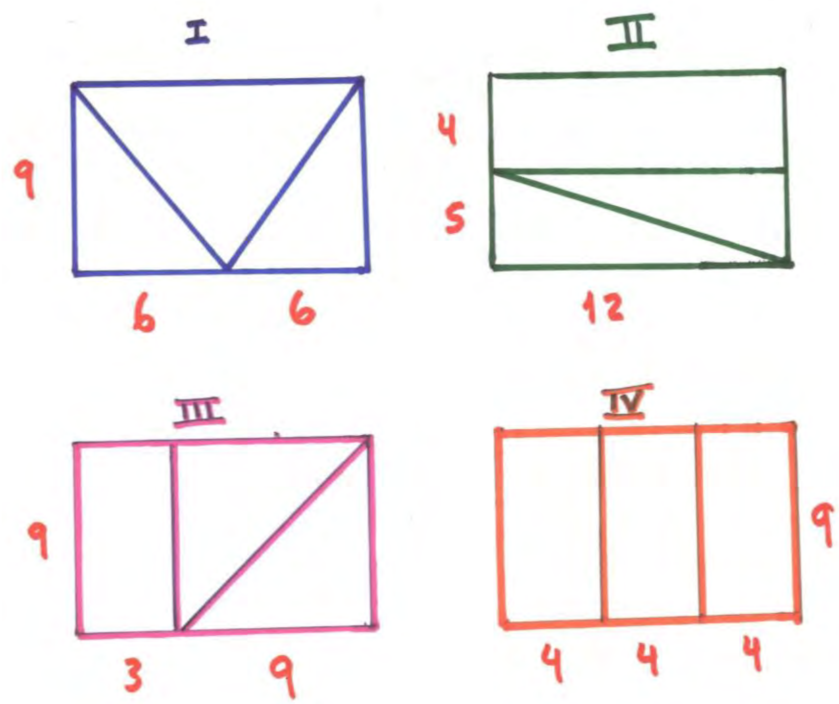
$$A_{Q_4} = b^2$$
$$A_{Q_4} = 110^2$$
$$A_{Q_4} = 12100 \, m^2$$

- Q_5 – **retângulo:** duas laterais valem 50 m e outras duas valem 200 m, então a área é:

$$A_{Q_5} = b.h$$
$$A_{Q_5} = 200.50$$
$$A_{Q_5} = 10000 \ m^2$$

 |

Exercício 3: Três irmãos herdaram um terreno que tem o formato retangular, com 12m de comprimento e 9m de altura. Cada um dos irmãos pretende criar um tipo diferente de gado na sua parte do terreno, e para que nenhum saia prejudicado os terrenos devem ter a mesma área. Das divisões propostas, qual atende esse requisito?



a) Nenhuma proposta apresenta as três áreas iguais.

b) IV

c) III

d) II

e) I

Correta: B

Exercício 4: (COMPERVE) Um rodapé de cerâmica de 17,6m de comprimento foi colocado em um quarto quadrado. Esse quarto tem duas portas de 1,2m de largura. Sabendo que o rodapé não foi aplicado na largura das portas, a área desse quarto é de

a) 49 m^2

b) 36 m^2

c) 25 m^2

d) 16 m^2

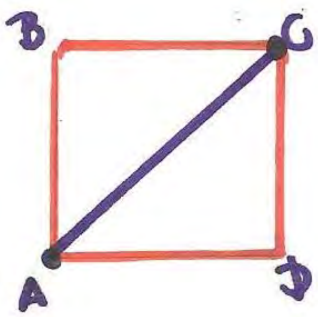
e) 10 m^2

Correta: C

DIAGONAIS DE FIGURAS PLANAS

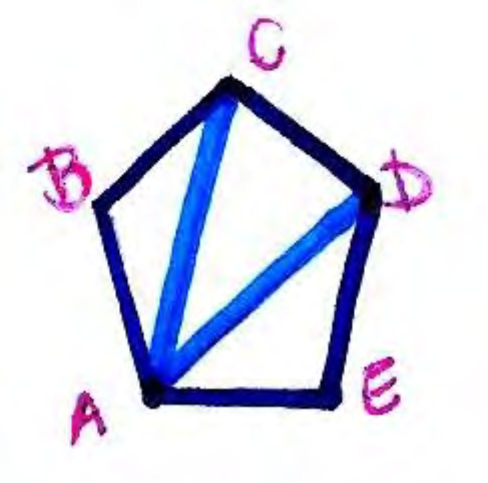
Outra análise interessante a ser feita além do perímetro e da área de figuras planas é o número de diagonais dos polígonos. Uma diagonal é traçada de um vértice a outro, desde que eles não sejam consecutivos, ou seja, que um vértice não esteja ao lado do outro (isso porque se você traçar uma reta entre dois vértices consecutivos será um lado da figura, certo?). Vamos analisar, a partir dos polígonos abaixo, o número de diagonais de saem de um dos seus vértices. Acompanhe:

QUADRADO



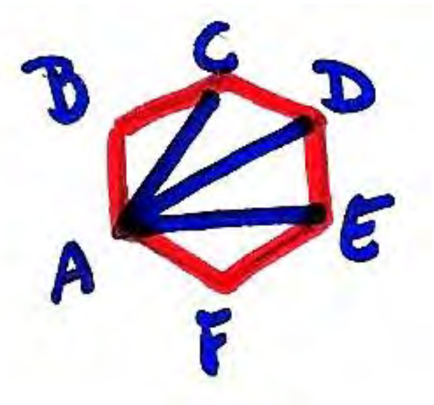
O número de lados e de vértices de um quadrado é 4, e apenas uma diagonal é formada a partir de um vértice. Portanto, cada um dos vértices forma uma diagonal, mas perceba que, por exemplo, a diagonal formada por AC é a mesma diagonal CA, assim como a diagonal formada por BD é a mesma formada por DB. Por isso, para saber o número de diagonais não basta multiplicar o número de vértices pelo número de diagonais que cada vértice forma, é necessário eliminar essas duplicidades, dividindo por 2. Em breve teremos uma fórmula bem simples para isso.

PENTÁGONO



O pentágono tem 5 vértices e o número de diagonais que saem de um de seus vértices é 2.

HEXÁGONO



O hexágono tem 6 lados e por isso 6 vértices, mas o número de diagonais de saem de um deles é 3.

Perceba que o número de diagonais que parte de um vértice é sempre 3 unidades abaixo do número de vértices. Esse é o motivo pelo qual o triângulo não possui diagonais. O triângulo tem três vértices e todos eles são consecutivos entre si, portanto, é impossível traçar uma diagonal. Utilizando o que aprendemos que de o número de diagonais que sai de um vértice é o número de vértices menos 3, teremos zero, e, então, nenhuma diagonal é traçada a partir de um de seus vértices.

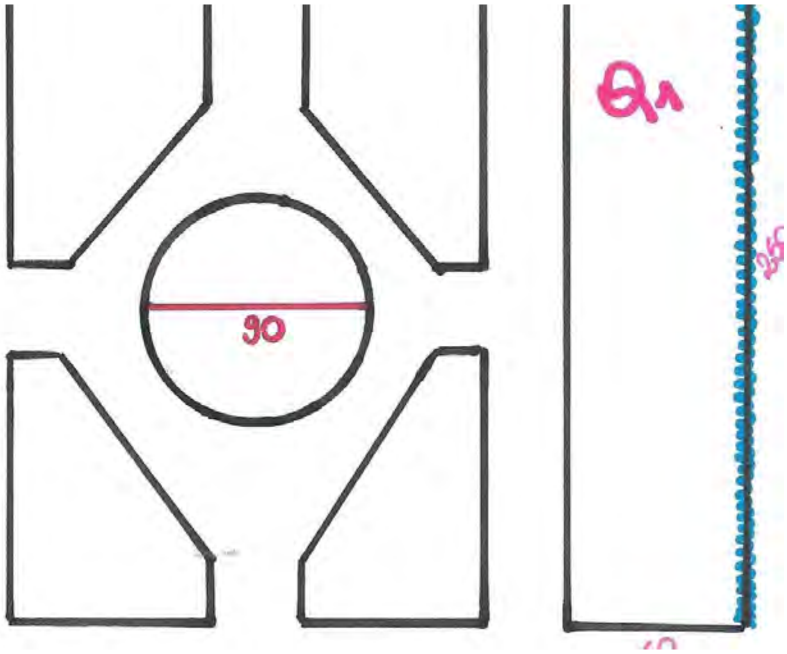
Depois de toda essa análise conseguiremos deduzir facilmente a fórmula para o número de diagonais de uma figura plana. Vamos chamar o número de vértices de n. Sabemos que o número de diagonais de sair de um vértice é 3 unidades abaixo do número total de vértices podemos escrever n - 3, então basta multiplicar o número de vértices pelo número de diagonais de cada um deles, dividindo por dois (lembre de eliminar a duplicidade). Portanto, teremos a seguinte equação:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

E assim é possível calcular o número de diagonais de qualquer polígono sabendo apenas o número de lados (e consequentemente de vértices).

PERÍMETRO E ÁREA DE CIRCUNFERÊNCIA

Vamos abordar um tópico que não foi comentado na seção anterior e talvez você já tenha notado. Na figura das quadras e ruas da cidade que estudamos anteriormente, à esquerda é possível ver uma rótula. Perceba também que ela apresenta uma linha que divide o círculo bem ao centro e que mede 90 m. Veja a figura abaixo para relembrar.



O porquê de não termos abordado esse assunto antes é bem simples: estávamos tratando de figuras geométricas que possuíam lados, diferentemente do que acontece com um círculo. Devido a esse detalhe, abordaremos a seguir algumas peculiaridades no cálculo de perímetro e área dessa figura geométrica. Então, vamos descobrir como é possível calcular o trajeto que os carros percorrem ao contornar completamente a rótula e qual é a área que ela ocupa na rua.

PERÍMETRO DO CÍRCULO *OU* CIRCUNFERÊNCIA:

É bastante comum que o perímetro de um círculo seja chamado apenas de comprimento da circunferência, ou apenas circunferência. Tente não se enganar, certo? Agora, imagine uma certa circunferência, de comprimento C_1 e com diâmetro D_1. Então essa circunferência sofre um aumento e seu diâmetro passa a ser $D_2 = 2D_1$. É intuitivo pensar que a circunferência também duplique, certo? E é verdade, mas não se preocupe com a prova. Vamos agora estabelecer a razão (divisão) dos dois diâmetros e circunferências.

$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{2C_1}{2D_1} = \frac{C_1}{D_1}$$

Perceba que para ambas as circunferências, a razão é a mesma. Se ao invés de multiplicarmos a primeira circunferência por 2, multiplicássemos por qualquer numero K. Então utilizamos o mesmo raciocínio anterior para mostrar que:

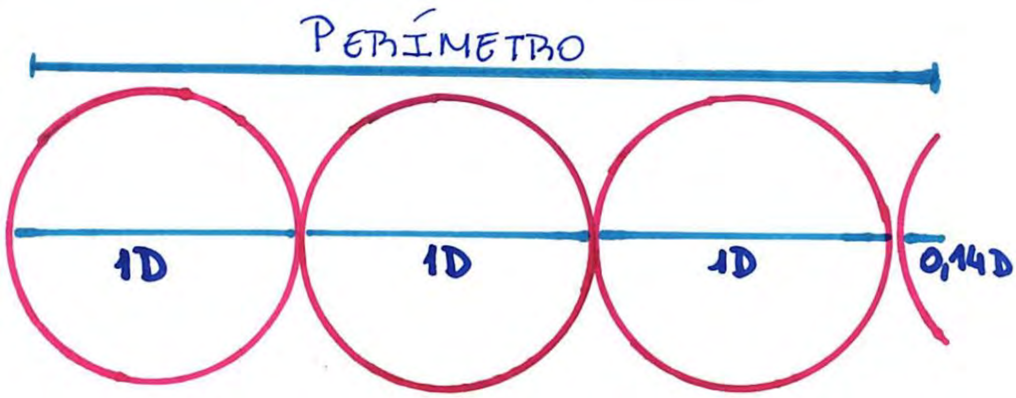
$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{KC_1}{KD_1} = \frac{C_1}{D_1} = \frac{C}{D}$$

O que diabos isso significa? Que a razão C/D é a mesma para **qualquer** circunferência! E ela tem um valor bem definido que chamamos de Pi e representamos pela letra grega abaixo.

$$\pi = \frac{C}{D} = 3,14$$

Ele é uma constante irracional e vale 3,14159265359..., mas é normalmente arredondado para 3,14. Não importa o tamanho da circunferência, essa proporção sempre será a mesma, aproximadamente 3,14. Veja a figura abaixo.

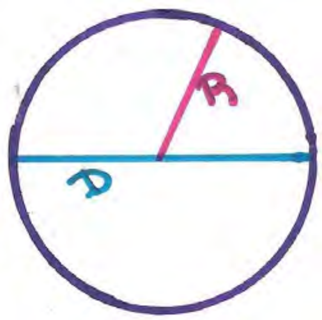
Você também pode conferir isso utilizando um barbante. Contorne um círculo com um barbante e divida-o em pedaços com o tamanho do diâmetro desse círculo. Você vai conseguir cortar 3 pedaços inteiros de diâmetro e apenas 0,14 de outro. Quer apostar?



Já que Pi sempre valerá 3,14, podemos reorganizar a equação acima para encontrar o perímetro da circunferência no caso de sabermos o valor do diâmetro. Veja:

$$C = \pi.D$$

Além disso, também é importante você saber que o diâmetro é duas vezes o **raio da circunferência**. Veja abaixo.



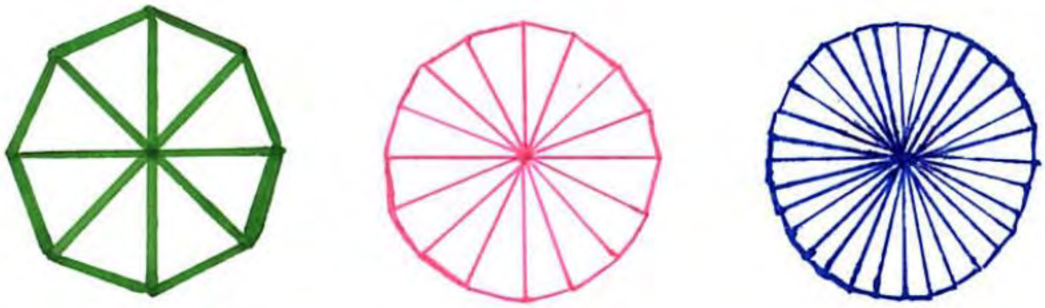
Em muitos problemas, o único dado fornecido é o raio. Por isso, podemos reescrever a equação acima como:

$$C = \pi.D \rightsquigarrow D = 2R$$
$$\boldsymbol{C = \pi.2R}$$

(Também conhecida como a equação dos dois franceses. Entendeu?)

ÁREA DO CÍRCULO

Todo o nosso raciocínio anterior para o cálculo das áreas dos polígonos regulares era baseado em figuras que continham lados, diferente do que acontece com o círculo. Será? Vamos analisar alguns exemplos. Veja os polígonos regulares abaixo.



Cada um deles possui vários lados, iniciando por 8 na primeira figura, passando por 16 na segunda e chegando a 32 na última. Poderíamos construir diversos outros aumentando o números de lados e, por consequência, aproximando raio e apótema, certo? Perceba que, se aumentarmos o número de lados num valor suficientemente grande, chegaremos a uma figura muito próxima de um círculo e, nesse caso, o apótema e o raio seriam praticamente o mesmo. É isso o que acontece no círculo: apótema e raio têm o mesmo valor e essa é a grande chave para o cálculo da área do círculo. Vamos relembrar a equação para o cálculo de um polígono regular de n lados:

$$A_{\substack{polígono\\regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

No caso do círculo, não temos lado, então vamos ignorar o n. Além disso, o *P*, que é o perímetro, aqui é C. Vamos fazer essa substituição:

$$A_{círculo} = \frac{C.h}{2}$$

Podemos substituir ainda o valor do perímetro a partir do raio; como o apótema é igual ao raio, teremos:

$$C = \pi 2R \;\; e \;\; h = R$$

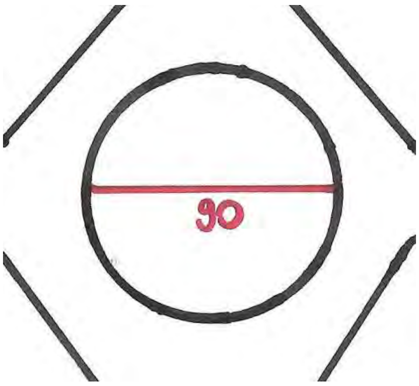
$$A_{círculo} = \frac{C.R}{2}$$

$$A_{círculo} = \frac{\pi 2R.R}{2}$$

Simplificando, chegaremos à equação final:

$$A_{círculo} = \pi R^2$$

Voltando ao nosso problema original, conseguimos visualizar facilmente que o diâmetro da rótula vale 90 m:



Então, o trajeto percorrido pelos motoristas ao contorná-la é o perímetro da circunferência, que será, portanto:

$$C = \pi D$$
$$C = 3{,}14.90$$
$$C = 282{,}6 \;\; m$$

Assim, os motoristas percorrem 282,6 m ao realizar a volta completa.

Lembre que também queremos saber a área que a rótula ocupa na rua. Perceba que, para isso, precisamos saber qual é o seu o raio. Felizmente já estamos muito espertos e sabemos que o raio é a metade do diâmetro, então:

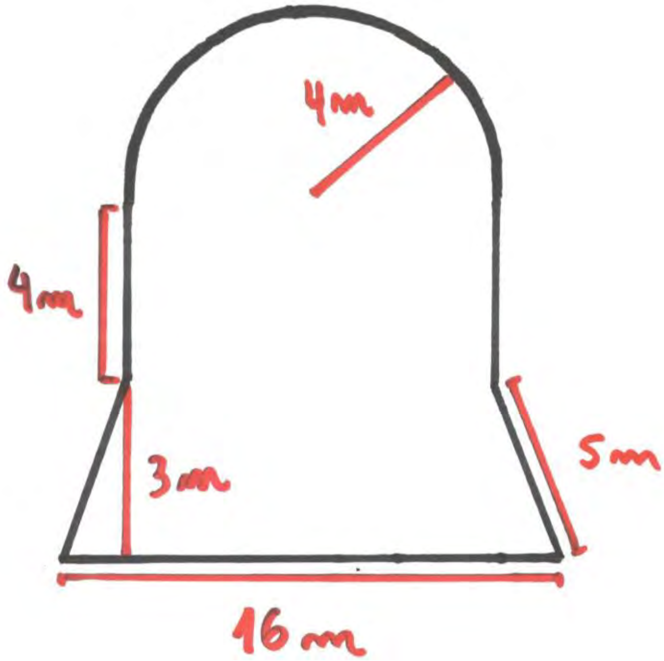
$$D = 2R$$
$$R = \frac{D}{2} = \frac{90}{2} = 45 \ m$$

Agora basta realizar o cálculo da área:

$$A = \pi R^2$$
$$A = 3{,}14.45^2$$
$$A = 6358{,}5 \ m^2$$

Assim, a área que a rótula ocupa é de 6358,5 m^2. Não esqueça as unidades, ok?

Exercício 5: Uma casa foi desenhada conforme a figura abaixo:



Sendo assim, qual seu perímetro e sua área? (Utilize π=3)

a) 46 m e 92 m^2

b) 44 m e 90 m^2

c) 46 m e 90 m^2

d) 92 m e 46 m^2

e) 49 m e 93 m^2

Correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE I

MATEMÁTICA

03

ARITMÉTICA II SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

meSalva!

ARITMÉTICA II - SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

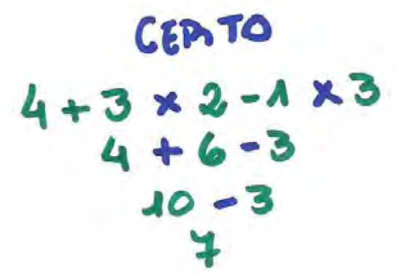
EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Provavelmente você já recebeu desafios matemáticos de seus amigos. Alguns são puramente substituição, outros são do tipo "pega ratão" e alguns são basicamente matemática mesmo, como a resolução de uma expressão numérica. Veja um exemplo.

Qual é o resultado da expressão 4 + 3 x 2 - 1 x 3?

a) 39
b) -39
c) 7
d) -7
e) 0

É bastante comum que, por achar a expressão tão simples, quem está resolvendo erre. Isso porque alguns sinais têm "prioridade" em relação aos outros, mas nem sempre são os que aparecem antes quando lemos a expressão da esquerda para a direita. Então, para resolver expressões numéricas é necessário lembrar que as operações de multiplicação e de divisão devem ser resolvidas antes das de soma e de subtração. Veja a diferença de resultados fazendo na ordem certa e na ordem errada:



A diferença é enorme, certo? Então, sempre lembre de resolver antes multiplicação e divisão (tanto faz a ordem, utilize a que lhe convier) e depois soma e subtração (na ordem que for melhor pra você).

Em problemas mais complexos, quando temos várias expressões se "cruzando" é bastante comum que alguns símbolos sejam utilizados, como parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }. A ordem é parênteses ficam dentro de colchetes que ficam dentro de chaves, ou seja, { [( )] }, e para resolver expressões que os contém também há uma ordem: sempre o que está "dentro" antes. Isso significa que sempre resolveremos o que está nos parênteses, depois o que está nos colchetes e por fim o que restou nas chaves. Mas fique atento! Você pode encontrar multiplicações e divisões dentro das chaves ou colchetes e não encontrar nos parênteses. O que resolver primeiro? A prioridade é antes símbolos e depois operações. Então, o que discutimos no exemplo anterior deve ser aplicado em cada um dos símbolos. Veja o exemplo:

$$\{4[3 \times 5 - 1 + (10 - 7)]\}$$
$$\{4[3 \times 5 - 1 + (3)]\}$$
$$\{4[3 \times 5 - 1 + 3]\}$$
$$\{4[15 - 1 + 3]\}$$
$$\{4[17]\}$$
$$\{4 \times 17\}$$
$$68$$

Para resolver as expressões numéricas basta ficar atento a essas ordens. Essa dica serve também para equações e qualquer outra forma de cálculo que você utilizar operações. Vamos discutir a seguir outras formas de simplificar expressões numéricas para chegarmos ao resultado o mais exato possível de forma simples.

(CONSULPLAN) Qual das expressões numéricas a seguir apresenta resultado correto?

a) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 84

b) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 264

c) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 34

d) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 64

e) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 720

Alternativa correta: C

(OBJETIVA) Dadas as três expressões numéricas abaixo, é CORRETO afirmar que:

(a) 2 + [(5 - 3) + 4] x 2 + 3

(b) 13 - [5 x (2 - 1) + 4 x 2]

(c) 6 + 4 x 2 x (5 - 1) - 7

a) b < a < c

b) a < b < c

c) c < a < b

d) c < b < a

Alternativa correta: A

RACIONALIZAÇÃO

Cálculos manuais muitas vezes são inviáveis por demorarem muito tempo para serem realizados e por não fornecerem respostas com muita precisão. Às vezes, porém, não há como fugir deles. Você viu que, em várias situações, tivemos exemplos de como facilitar a vida de quem estava calculando, certo? A utilização da racionalização é mais uma forma de auxiliar a pessoa que está resolvendo um problema a ter mais facilidade e precisão em seus cálculos, já que essa operação é utilizada quando há uma raiz no denominador de uma fração.

São três os principais casos:

RAIZ QUADRADA

Devemos multiplicar a fração que apresenta raiz quadrada no denominador por uma fração com a mesma raiz quadrada no numerador e no denominador. Veja o exemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Perceba que, sempre que uma racionalização é realizada, a raiz desaparece do denominador, certo? A ideia é essa. Caso isso não ocorra, tem alguma coisa errada nas suas continhas.

RAIZ NÃO QUADRADA

Nesse caso, a fração que é multiplicada não é igual à raiz do primeiro denominador apenas por um detalhe, o expoente. Preste atenção nesse procedimento:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^{1}}}$$

$$3 - 1 = 2$$

Essa é a relação que sempre será utilizada nesses casos. Vamos aplicar esse expoente nas raízes da fração a ser multiplicada:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2^1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1 \cdot 2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$1 + 2 = 3$$

Repare que é possível agrupar as raízes a partir da multiplicação daquelas com o mesmo índice. Nesse caso, dentro da raiz, temos bases iguais, então podemos somar seus expoentes. O restante é simplificação e, por fim, o resultado. Meio chatinho no começo, mas nada que seja impossível de fazer, né? Lembre-se de treinar isso aí!

SOMA OU SUBTRAÇÃO COM RAIZ

Bastante semelhante ao primeiro caso, mas dessa vez a multiplicação é pelo conjugado. O que é isso? Veja:

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{4(2-\sqrt{2})}{(2)^2-(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}}=\frac{8-4\sqrt{2}}{4-2}=\frac{8-4\sqrt{2}}{2}$$

sinais inversos

Note que a fração pela qual multiplicamos a original resulta em 1, e por isso não altera o resultado. Em seguida, basta continuar a resolução, mas atenção: não é possível realizar a subtração do numerador da última fração, certo? O resultado é dado dessa forma, a menos que você realize o cálculo da raiz de 2, multiplique por 4 e, aí sim, realize a subtração.

(FUVEST) O valor da expressão abaixo

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$ é:

a) 2

b) 5

c) 1

d) 3

e) 4

Alternativa correta: E

Racionalizando o denominador da fração $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$ obtemos:

a) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{2} - \sqrt{2}$

e) $2 - \sqrt{2}$

Alternativa correta: B

PRODUTOS NOTÁVEIS

Ao longo do nosso estudo vamos nos deparar com equações de 2° grau (ou 3°, 4° e assim por diante), e é bastante comum que encontremos expressões com a mesma "cara", termos fatorados colocando em evidência o que se repete. Por isso é importante sabermos realizar alguns procedimentos que facilitam a resolução de termos que envolvem soma ou subtração e expoentes maiores do que 1. A chave para resolver esses probleminhas é a aplicação de uma propriedade que se chama distributividade. Lembra desse nome? Vamos ver como aplicá-la! Para isso, considere a e b diferentes de zero.

FATORAÇÃO POR TERMO EM EVIDÊNCIA OU FATOR COMUM

Quando há termos que se repetem em algumas ou todas as parcelas de uma expressão é possível realizar a fatoração deles. Ou seja, transformar esses termos em termos menores que se multiplicam. Veja o exemplo:

$$2a^2 + 2ab$$

Veja que tanto o 2 quanto o a aparecem nos dois termos (fator comum). Então podemos reescrever a expressão colocando esses termos que mais aparecem em evidência, multiplicando o que resta para obter a expressão original:

$$2a^2 + 2ab = 2a(a + b)$$

Lembre que mesmo que façamos a fatoração o resultado da expressão será o mesmo. A única diferença é que às vezes é mais fácil entender ou resolver as expressões na forma fatorada.
Agora que já sabemos como realizar esse procedimento, podemos iniciar a discussão de produtos notáveis. Perceba que em todos os casos temos termos em evidência e vamos “abri-los” em polinômios que se multiplicam, ou seja, polinômios fatorados.

QUADRADO DA SOMA

Quando temos dois números, ou um número e uma variável, ou ainda duas variáveis somadas e elevadas ao quadrado. Veja abaixo:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Vamos nos ater aos termos fatorados e aplicar a distributiva, ou seja, multiplicaremos o primeiro termo do primeiro parênteses pelos dois termos do segundo; em seguida, faremos o mesmo procedimento com o segundo termo. Observe as setinhas, será mais fácil de entender:

$$(a+b).(a+b)$$

Esse método é carinhosamente chamado de “chuveirinho”. Agora veja o resultado dessa multiplicação. As cores dos termos correspondem às setas acima.

$$a.a + a.b + b.a + b.b$$

Perceba que a.b é o mesmo que b.a, então podemos reescrever dessa forma:

$$(a + b)^2 = a.a + 2.a.b + b.b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

É bastante comum que se ensine um macete para lembrar como chegar a esse resultado: o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Não é difícil lembrar, mas, caso você tenha um “branco”, é bastante simples fazer a distributiva e chegar a esse resultado.

QUADRADO DA DIFERENÇA

O procedimento neste caso é exatamente o mesmo do anterior. Veja o resultado:

$$(a - b)^2 = a.a - a.b - b.a + b.b$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Perceba que o resultado é bastante semelhante ao anterior, com exceção do sinal de menos. Então, a frase do macete só mudaria nesse detalhe: o quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

Apesar de também aplicarmos a distributiva, neste caso a “cara” da expressão muda um pouco. Antes tínhamos dois termos iguais sendo multiplicados (por isso eram elevados ao quadrado). Agora temos dois termos iguais, exceto pelo sinal, sendo multiplicados. Acompanhe:

$$(a + b)(a - b) = a.a - a.b + b.a - b.b$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 + 0 + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$$

O resultado dessa operação tem apenas dois termos! Isso acontece porque os outros dois termos se anularam.

CUBO DA SOMA

Apesar de parecer apavorante, é bastante simples, ainda mais agora que você já sabe o resultado do quadrado da soma. Veja como o cubo pode ser reescrito:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

Isso é possível porque, como você viu na apostila de Aritmética I, quando temos bases iguais sendo multiplicadas, os expoentes devem ser somados. Como você já sabe o resultado do termo ao quadrado, podemos reescrever da seguinte forma:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

E agora é hora de aplicar a distributiva! Vai ficar um pouco maior, mas é só você se organizar para não se perder! Vamos utilizar as setas?

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

Isso resultará em:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$(a + b)^3 = a.a^2 + a.2ab + a.b^2 + b.a^2 + b.2ab + b.b^2$$

Reagrupando os termos, chegaremos a:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

A chave para resolver esse tipo de operação é a organização. Então, fique atento e não economize na hora de escrever os termos, ok?

CUBO DA DIFERENÇA

O procedimento é o mesmo do anterior. Vamos primeiramente dividir os termos, substituir o termo ao quadrado pelo resultado que já sabemos e resolver o restante. Acompanhe:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$$
$$(a - b)^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ab^2 + 2ab^2 - b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Resultado bastante parecido com o anterior, exceto pelos sinais, percebe? Então, novamente, muita atenção com os sinais! Perceba ainda que os produtos notáveis são muito úteis tanto para expandir um termo, como fizemos, quanto para comprimi-los, já que você pode realizar o caminho inverso do que acabamos de fazer. Agora que você aprendeu todas essas “técnicas”, está preparado para o nível hard de resolução de problemas!

(PUC-RJ) Sabemos que $(\sqrt{1+c})(\sqrt{1-c})=1$. Assinale o valor de c.

a) 2

b) 1/2

c) 1

d) 0

e) 1/3

Alternativa correta: D

A forma simplificada da expressão $(x-y)^2 - (x+y)(x-y)$ é:

a) -2xy

b) 2xy

c) $2x^2-2xy$

d) $2y^2-2xy$

e) 2y(y-x)

Alternativa correta: D

A expressão 2xy – 4x + y – 2 fatorada é:

a) (2x + 1) (y + 2)

b) (2x + 1) (y – 2)

c) (2x + 1) (y + 2)

d) (2x – 1) (y – 2)

e) (2x + 1) (y – 1)

Alternativa correta: B

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. São Paulo: FTD, 2000. 670 p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE I

MATEMÁTICA

04

ÁLGEBRA I
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

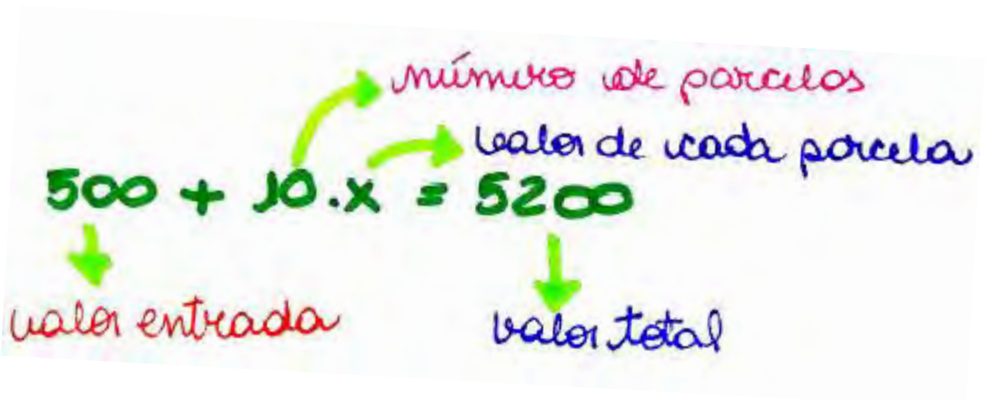
meSalva!

ÁLGEBRA I

Em geral a palavra Álgebra causa um arrepio nas pessoas, mas prometemos que isso não acontecerá com você! Essa área do conhecimento consiste basicamente na utilização de símbolos (em geral são utilizadas letras) nas expressões numéricas que você está acostumado a resolver. Ao longo do nosso estudo de Álgebra você verá que utilizando esses símbolos é possível expressar problemas mais complexos e que são necessários para o desenvolvimento da humanidade. Essa área foi dividida em duas apostilas e nessa você será introduzido a esse mundo maravilhoso da resolução problemas utilizando manipulações matemáticas.

EQUAÇÕES DE 1º GRAU

Você recebeu um email com o anúncio do computador dos seus sonhos, porém sua situação financeira não está muito boa. O valor dele à vista é R$ 4.500,00, mas a loja permite que você faça a compra parcelada em 10 vezes fixas, com uma entrada de R$ 500,00 totalizando R$ 5.200,00. Esse tipo de anúncio é bastante comum e às vezes não contém o valor das parcelas, mas o cálculo é bastante simples e você sabe como resolvê-lo rapidamente. Basta fazer a subtração entre 5.200 e 500, que resultará em 4.700 e dividir esse valor por 10, que é o número de parcelas. Isso significa que cada parcela será de R$ 470,00. Esse foi um cálculo tão simples que às vezes nem percebemos quanta matemática está envolvida, mas utilizamos conceitos muito importantes nessa resolução. Veja como esse problema pode ser reescrito:



Com o auxílio da matemática, “traduzimos” o que estava escrito no anúncio para uma linguagem simplificada e bastante visual. Para isso foi necessário utilizar operações matemáticas (nesse caso, adição e multiplicação), igualdade e uma

 |

letra, descrevendo o que chamamos de equação algébrica. Essa letra – no nosso caso o x, mas poderia ser qualquer outra – é chamada de variável ou de incógnita.

Então, a álgebra é caracterizada pela coexistência de letras e números em uma conta chamada de "equação", devido à presença do sinal de igual. Perceba que o expoente da variável x é 1 (foi omitido por conveniência, como estudamos anteriormente) e, por isso, essa equação é denominada Equação de 1º Grau, isto é, a variável dessa equação tem grau 1. Isso significa que há apenas uma solução para essa equação. A resolução envolve basicamente o isolamento da variável. Lembre que, para cancelar uma operação de um lado, basta realizar a sua inversa dos dois lados da equação. Veja um exemplo:

$$500 + 10x = 5200$$
$$-500 + 500 + 10x = 5200 - 500$$
$$10x = 5200 - 500$$
$$10x = 4700$$
$$\frac{10x}{10} = \frac{4700}{10}$$
$$x = \frac{4700}{10}$$
$$x = 470$$

Claro que se você já está familiarizado com a resolução de equações, não há necessidade de fazer todos esses passos, pois é bastante provável que você lembre da frase "passa para o outro lado com o sinal trocado" ou "se está dividindo, passa para o outro lado multiplicando", entre outras, mas o cerne dessas frases é que toda a operação feita de um lado da equação deve ser feita do outro lado também para que a equivalência não seja desfeita.

O valor encontrado para x é chamado de solução ou raiz e é, no nosso exemplo, exatamente o valor das parcelas do computador. Para termos certeza de que esse valor é a solução (ou raiz) dessa equação de 1° grau, devemos substituir o valor encontrado na equação e analisar se o resultado faz sentido. Acompanhe:

$$500 + 10x = 5200$$
$$500 + 10(470) = 5200$$
$$500 + 4700 = 5200$$
$$5200 = 5200$$

Como essa igualdade é verdade, sabemos que 470 é realmente a raiz dessa equação. É comum que a raiz seja chamada de zero da equação, pois, se a equação está igualada a zero, o seu objetivo será encontrar um valor que a zere.

Formalizando as Equações de 1º Grau, teremos a equação geral na forma de:

$$ax + b = 0$$

Em que a sempre será diferente de zero e x é a variável que procuramos. Podemos reescrever o problema anterior apenas reorganizando seus termos. Veja:

$$500 + 10x = 5200$$
$$500 - 5200 + 10x = 0$$
$$-4700 + 10x = 0$$
$$\mathbf{10x - 4700 = 0}$$

Comparando essa equação à equação geral, teremos que a = 10 e b = -4700. Isso pode parecer irrelevante agora, mas logo você perceberá a importância disso, ok?

EQUAÇÕES DE 1° GRAU COM DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Vamos complicar um pouco a situação. Você, sempre ligado nas promoções, recebeu outro e-mail com ofertas. Dessa vez a barbada é: compre 3 calças e 5 blusas por apenas R$ 450,00. Você resolveu fazer as contas para saber quanto, mais ou menos, seria o preço de cada tipo de peça para ver se valia a pena aproveitar. Como você já está bem familiarizado com a álgebra, resolveu construir uma equação para resolver esse problema, mas percebeu que dessa vez há dois itens diferentes envolvidos. E agora? Antes aprendemos que podemos substituir algo que não sabemos por uma letra, que chamamos de variável. Agora, há duas coisas que não sabemos, será que podemos realizar o mesmo procedimento? Claro! Podemos adicionar quantas variáveis forem necessárias para resolver o problema. O que vai mudar um pouco é a forma de resolução. Vamos montar o anúncio de forma algébrica:

$$3x + 5y = 450$$

Em que o x será o valor de cada calça e o y será o valor de cada blusa. Mas e agora, como resolver essa equação? Perceba que é inútil apenas isolar uma das variáveis, porque não há como resolver a equação apenas dessa forma. Antes isso funcionava porque tínhamos apenas uma solução para a equação, agora teremos o que chamamos de pares ordenados. O que é isso? Vamos arbitrar que o preço de uma calça deve ser R$ 80,00 e vamos substituir esse valor na equação:

$$3x + 5y = 450$$
$$3(80) + 5y = 450$$
$$240 + 5y = 450$$

Agora temos novamente apenas uma variável. Portanto, podemos aplicar o mesmo procedimento de antes, isolando o y:

$$240 + 5y = 450$$
$$5y = 450 - 240$$
$$5y = 210$$
$$y = 42$$

Então, se o valor da calça for R$ 80,00, o da blusa deve ser R$ 42,00. Perceba a dependência que um valor tem do outro, se x = 80, então y = 42. Isso é um par ordenado! São dois valores que transformam a equação verdadeira, ou seja, uma das soluções para essa equação! E se o preço de cada calça fosse R$ 90,00?

$$3x + 5y = 450$$
$$3(90) + 5y = 450$$
$$270 + 5y = 450$$
$$5y = 450 - 270$$
$$5y = 180$$
$$y = \frac{180}{5}$$
$$y = 36$$

O preço de cada blusa seria R$ 36,00. Então o par ordenado agora seria x = 90 e y = 36 e essa seria outra solução para a equação. Formalizando essas respostas, teremos (80, 42) e (90, 36). Note que os pares ordenados podem ter infinitas variações e dependem das equações envolvidas.

Para finalizar, vamos ver a equação geral de equações de 1° grau com duas variáveis:

$$ax + by = c$$

Em que a e b devem ser diferentes de zero.

No caso do nosso problema, teríamos a = 3, a quantidade de calças, e b = 5, a quantidade de blusas.

(VUNESP – 2011) Pedrinho tinha quatro anos quando sua mãe deu à luz a gêmeos. Hoje, a soma das idades dos três irmãos é 52 anos. A idade de Pedrinho hoje é:

a) 16 anos

b) 17 anos

c) 18 anos

d) 19 anos

e) 20 anos

Alternativa correta: E

(PMPP – 2012) – Dona Yara comprou 4 pares de sapatos e gastou R$ 725,00 ao todo. O 2.º par de sapatos custava R$ 20,00 a mais do que o 1.º, o 3.º custava o dobro do 2.º, e o 4.º custava o triplo do 1.º. O preço do 4.º par de sapatos foi:

a) R$285,00

b) R$265,00

c) R$245,00

d) R$ 230,00

e) R$205,00

Alternativa correta: A

(UBAU – 2012) – Um animador de festas pediu a atenção dos participantes e proclamou: – Pensei em um número. Multipliquei esse número por 5 e depois subtraí 65 do produto. O valor obtido é o mesmo que somar 81 ao triplo do número que eu tinha pensado no início. O número que eu pensei é um número que está entre:

a) 21 e 30

b) 40 e 63

c) 70 e 85

d) 88 e 90

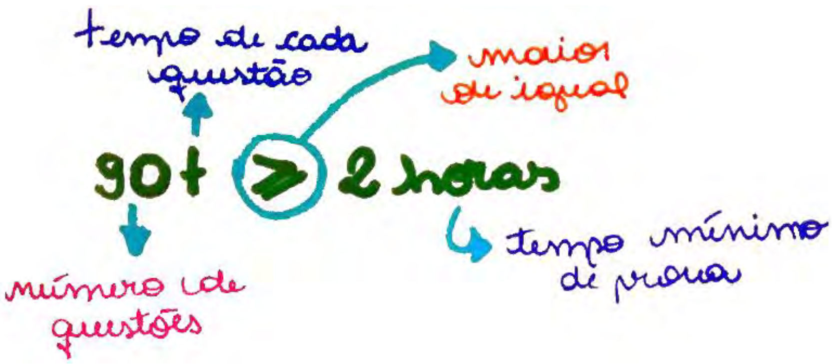
e) 100 e 112

Alternativa correta: C

INEQUAÇÕES DE 1° GRAU

Estudantes que prestarão a prova do ENEM deverão responder, no primeiro dia da prova, 90 questões no tempo mínimo de 2 horas e de no máximo 4 horas e 30 minutos. Os professores do Me Salva! procuram chamar bastante atenção para um ponto muito importante, o treino da prova, ou seja, os simulados. Participar desses simulados é fundamental para que o estudante chegue na prova familiarizado com as características das questões e assim possa realizar a prova com mais tranquilidade. Outro quesito em que os simulados ajudam bastante é o treino no tempo de resolução de cada questão. São 90 questões para fazer em no máximo quatro horas e meia. Isso significa que é pouco ou muito tempo? Para respondermos essa pergunta vamos começar a utilizar sinais que, a partir de agora, serão chamados de sinais de desigualdade (maior ou igual, menor ou igual, maior, menor ou diferente).

Você consegue perceber que podemos montar uma “equação” relacionando o número de questões com o tempo da prova e o tempo de resolução de cada uma delas? É bastante semelhante ao que fizemos na seção anterior, mas agora no lugar do sinal de igual teremos uma desigualdade e, por isso, não vamos mais chamá-la de equação, mas de inequação. Fique tranquilo, o procedimento é bastante parecido. Vamos montar a inequação do tempo mínimo de prova, que é de 2 horas:



Perceba que o número de questões multiplicado pelo tempo de resolução de cada uma delas deve ser maior ou igual a 2 horas. Antes de iniciarmos a resolução vamos modificar a unidade de tempo. Temos o tempo em horas, mas fica difícil visualizar o tempo para cada questão se utilizarmos horas, certo? Então vamos transformar as horas em segundos. Mais adiante você vai aprender a fazer a regra de três; por enquanto, peço que você confie e apenas multiplique o número de horas por 3.600 (uma hora tem 3.600 segundos), e assim teremos o valor em segundos. Nesse caso, teremos:

$$2 \times 3600 = 7200 \text{ segundos}$$

Vamos substituir esse valor na inequação anterior e resolvê-la:

$$90t \geq 7200 \text{ segundos}$$
$$t \geq \frac{7200}{90}$$
$$t \geq 80 \text{ segundos}$$

Então, considerando que todas as questões são realizadas exatamente no mesmo tempo, o tempo para resolução de cada questão é de mais de 80 segundos, ou seja, 1 minuto e 20 segundos. Outra forma de entender esse resultado é que 80 segundos é o tempo mínimo para resolver cada questão. Mas e o tempo máximo que se tem para resolver cada uma delas? Lembre que o tempo máximo da prova é de 4 horas e meia, ou seja, não pode ultrapassar esse valor. Portanto, o número de questões multiplicado pelo tempo de resolução de cada uma delas deve ser menor ou igual ao tempo máximo de prova. Veja como esse problema pode ser montado:

tempo de cada questão

menor ou igual

$$90t \leq 4{,}5 \text{ horas}$$

número de questões

tempo máximo de prova

Agora vamos transformar o tempo em horas para segundos:

$$4{,}5 \times 3600 = 16200 \text{ segundos}$$

Ótimo! Podemos substituir esse valor na inequação acima e resolvê-la:

$$90t \leq 16200 \text{ segundos}$$
$$t \leq \frac{16200}{90}$$
$$t \leq 180 \text{ segundos}$$

A partir dessa resolução, temos que o tempo máximo para resolver cada questão deve ser de 180 segundos, ou 3 minutos.

Para finalizar, podemos simplificar o resultado das duas inequações que acabamos de resolver: o tempo mínimo de resolução é 80 segundos e o máximo é 180 segundos, ou seja, o tempo deve estar entre esses dois valores, certo? Lembrando sempre que estamos considerando que as questões são resolvidas no mesmo tempo. Isso pode ser "traduzido" matematicamente como:

$$80 \leq t \leq 180$$

Você pode ler de várias formas, uma delas é o que já foi dito, que o tempo de resolução deve estar entre 80 e 180 segundos, mas isso não é tão preciso, já que temos os sinais de igualdade inclusos. Então, você pode ler, do meio para a esquerda, que o tempo deve ser maior ou igual a 80 e, do meio para a direita, o tempo de resolução deve ser menor ou igual a 180. Apesar de essa resposta estar correta, a forma usual de expressá-la é utilizando conceitos de conjuntos. Nesse caso podemos utilizar todo o conjunto dos Reais, mas isso nem sempre acontece (apesar de ser usual). Por exemplo: se tivéssemos apenas a informação de que *t* deve ser menor do que 80, você precisaria sinalizar que isso não inclui números negativos, afinal não há tempo negativo. No caso que estamos estudando, a região está bem delimitada, pois o tempo deve estar entre 80 e 180 segundos e pode assumir valores diversos nesse intervalo, por isso é possível utilizar o conjunto dos Reais. Resumindo, você sempre precisará analisar o problema. Veja como expressar a resposta da forma correta:

$$S = \{t \in \Re \mid 80 \leq t \leq 180\}$$

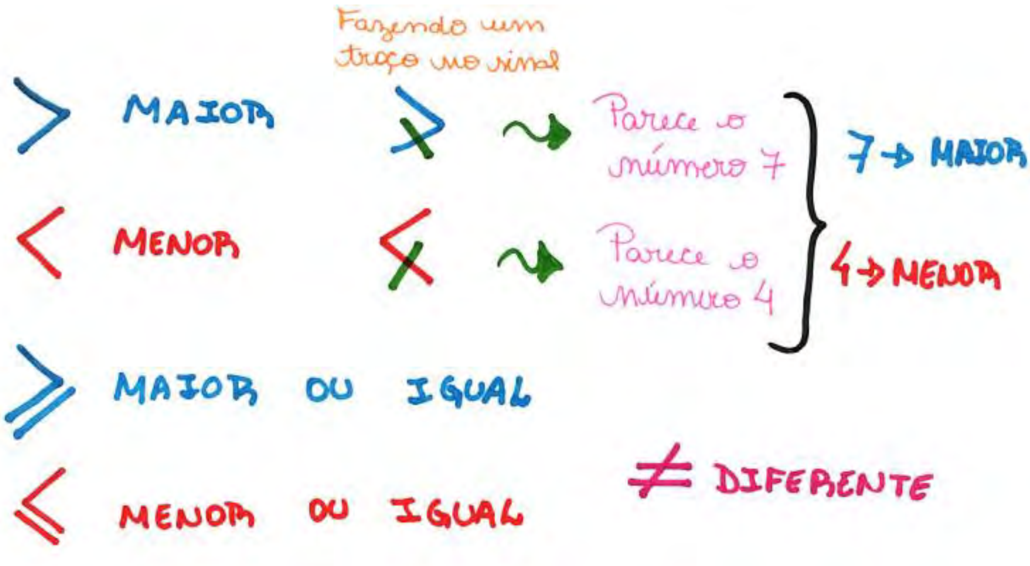
Lê-se "*t* pertence aos Reais tal que t é maior ou igual a 80 e *t* é menor ou igual a 180". Preste atenção para utilizar a variável correta (na maioria das vezes temos o x no lugar do t) e o conjunto ao qual pertence a solução (S).

Também é possível expressar matematicamente o tempo da prova:

$$2 \text{ horas} \leq T \leq 4{,}5 \text{ horas}$$

E a forma de ler é a mesma: do meio para a esquerda, "o tempo de prova (T) deve ser maior ou igual a 2 horas"; do meio para a direita, "o tempo de prova (T) deve ser menor ou igual a 4,5 horas".

Foi simples resolver esse probleminha, certo? Vamos deixar um lembrete de "nomes" dos sinais e como saber qual é o sinal de maior e qual é o sinal de menor. Depois desse esquema você nunca mais vai fazer confusão! Veja:



Outra forma de memorizar isso tudo é imaginando o sinal como se ele fosse a boca de um jacaré. Como esse jacaré é guloso, ele sempre come o número maior. Então, veja que no caso de $5 > 3$ a boca do jacaré está tentando abocanhar o 5, que é o número maior. No caso $1 < 2$, ela está tentando abocanhar o número 2. Legal, né?

Assim como as equações, as inequações também têm sua forma geral, que é bastante semelhante ao que já estudamos:

$$ax + b \geq 0$$

Em que a deve ser diferente de zero e o sinal de maior ou igual pode ser substituído por menor ou igual, menor, maior ou diferente. Como estamos tratando de inequações de primeiro grau, o expoente da variável – x, nesse caso – sempre será 1.

A resolução de inequações apresenta algumas particularidades, apesar de seguir os mesmos preceitos da resolução de equações. Vamos estudá-las a partir de agora:

PRINCÍPIO ADITIVO

Apesar de ser chamado de aditivo, esse princípio também envolve subtração. Vamos tomar como exemplo a desigualdade $10 > 8$ (10 maior do que 8). Essa é uma desigualdade verdadeira. Agora vejamos o que acontece se adicionarmos ou subtrairmos valores de ambos os lados da expressão.

ADICIONANDO UM NÚMERO:

$$10 > 8$$
$$10 + 2 > 8 + 2$$
$$8 > 6$$

Como 12 é maior do que 10, a desigualdade foi mantida e o sinal continua o mesmo!

SUBTRAINDO UM NÚMERO:

$$10 > 8$$
$$10 - 2 > 8 - 2$$
$$8 > 6$$

Novamente a desigualdade se manteve, já que 8 é maior do que 6. Note que quando adicionamos ou subtraímos um número a desigualdade se mantém.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Assim como no princípio anterior, esse, apesar de ser chamado de multiplicativo, envolve também a divisão. Vamos ver o que acontece com a desigualdade 10 > 8 nos casos abaixo.

MULTIPLICANDO POR UM NÚMERO POSITIVO

Multiplicaremos ambos os lados por 2.

$$\begin{aligned} 10 &> 8 \\ 10(2) &> 8(2) \\ 20 &> 16 \end{aligned}$$

A desigualdade continua sendo verdadeira.

DIVIDINDO POR NÚMERO POSITIVO

Descobriremos o que acontece se dividirmos os dois lados por 2.

$$\begin{aligned} 10 &> 8 \\ \frac{10}{2} &> \frac{8}{2} \\ 5 &> 4 \end{aligned}$$

A desigualdade também é mantida!

MULTIPLICANDO POR NÚMERO NEGATIVO

Vamos realizar os mesmos procedimentos e analisar o que acontece com a desigualdade se a multiplicamos por um número negativo – no caso, -2.

$$\begin{aligned} 10 &> 8 \\ 10(-2) &> 8(-2) \\ -20 &< -16 \end{aligned}$$

Que interessante! A desigualdade é INVERTIDA! Como assim? Para manter a coerência, tivemos que inverter o sinal, já que -20 é menor do que -16.

DIVIDINDO POR NÚMERO NEGATIVO

Dividiremos por -2 para ver o que acontece com a desigualdade.

$$10 > 8$$
$$\frac{10}{-2} > \frac{8}{-2}$$
$$-5 < -4$$

Novamente o sinal precisou ser invertido para manter a coerência da desigualdade, já que -5 é menor do que -4.

O objetivo era mostrar para você o porquê de sempre termos que inverter o sinal da desigualdade quando nos deparamos com uma multiplicação ou uma divisão por número negativo. Então, se você não gosta de decorar regrinhas, agora já sabe qual é o procedimento para saber quando é hora de inverter o sinal ao realizar a resolução de uma inequação, tanto de uma quanto de duas variáveis. Isso significa que, quando você se deparar com uma inequação, tenha em mente que aquele sinal "diferente" não é um bicho de sete cabeças, beleza?

Dada a inequação $5x - 1 < 7x + 6$, sua solução é:

a) $x \leq 6$

b) $x > -7/2$

c) $x > -1$

d) $x < 7$

e) $x > 6/7$

Alternativa correta: B

Entre as opções a seguir, qual é a que melhor representa a idade de Maria? "Ana tem duas vezes a idade que Maria terá daqui a 10 anos, entretanto, a idade de Ana não supera o quádruplo da idade de Maria".

a) A idade de Ana é maior que a idade de Maria.

b) A idade de Maria é menor que a idade de Ana.

c) A idade de Ana é maior que 10 anos.

d) A idade de Maria é maior que 10 anos.

e) A idade de Maria é menor que 10 anos.

Alternativa correta: B

(PUC-SP) O menor número inteiro k que satisfaz a inequação $8 - 3(2k-1) < 0$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Alternativa correta: E

O maior número natural x que satisfaz a inequação $5 - 2(x-1) > 3$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Alternativa correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003

PARTE I

MATEMÁTICA

05

RAZÃO E PROPORÇÃO

RAZÃO E PROPORÇÃO

PROPORCIONALIDADE DE GRANDEZAS

É bastante comum ouvirmos ou falarmos frases do tipo "quanto mais você estudar, melhor vai se sair na prova", "quanto menos você dormir, mais cansado vai ficar", "quanto mais você beber água, mais ficará hidratado", entre inúmeras outras. Perceba que essas frases têm em comum relações entre duas "grandezas": estudo e resultado da prova, sono e cansaço, água e hidratação. Essa relação entre as grandezas pode ser entendida também como de proporcionalidade, podendo ser diretamente ou inversamente proporcional. Como assim? Por exemplo: quanto mais questões você responder, menos tempo vai demorar nas próximas resoluções; quanto mais você caminhar, mais distância irá percorrer. Essas relações são inversa ou diretamente proporcionais? Para responder, vamos analisar o problema parte a parte.

RAZÃO E PROPORÇÃO

Uma razão é a divisão entre dois números e a proporção é uma igualdade entre razões. Parece estranho? Imagine que você lê uma receita em que há: para cada xícara de achocolatado, coloque três de leite (1 está para 3), mas você resolve dobrar essa receita, então precisará duas xícaras de achocolatado e seis de leite. A razão é a relação entre o número de xícaras de achocolatado e o número de xícaras de leite; a proporção é a relação entre uma receita e duas receitas. Veja abaixo:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

A razão de uma receita deve ser lida como "1 está para 3" e a razão da receita dobrada deve ser lida como "2 está para 6". Como temos uma relação de proporção entre essas razões, dizemos "1 está para 3 assim como 2 está para 6".

REGRA DE TRÊS

Agora você está preparando outra receita que sugere que, para cada colher de açúcar, devem ser colocadas 3,5 de farinha. Sem querer, porém, você colocou 3 colheres de açúcar, então precisará consertar o estrago colocando o equivalente de farinha. Como fazer isso? Problemas desse tipo são fáceis de resolver de cabeça, mas às vezes precisamos de algo mais visual, certo? Por isso podemos utilizar a regra de três. Vamos montar um esqueminha em que a quantidade de açúcar de uma receita está na mesma linha que a outra quantidade e que a quantidade de farinha está na mesma linha que a quantidade de farinha que ainda não sabemos qual é. A regra de três propõe uma multiplicação “cruzada”. Veja o procedimento abaixo:

1 colher de açúcar — 3,5 colheres de farinha
3 colheres de açúcar — x colheres de farinha

Agora que está tudo bem organizado, vamos fazer a multiplicação cruzada:

1 colher de açúcar — 3,5 colheres de farinha
3 colheres de açúcar — x colheres de farinha

Que resultará em:

$$(1)(x) = (3{,}5)(3)$$
$$x = \frac{10{,}5}{1}$$
$$x = 10{,}5$$

Para que a proporcionalidade seja mantida, é necessário que você adicione 10,5 colheres de farinha à mistura.

A regra de três é muito útil e também muito simples, basta que você tenha atenção na hora de montá-la, certo?

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Sabemos da importância da atividade física regular na vida das pessoas e o quanto ela pode diminuir o risco de algumas doenças. Apesar disso, muita gente alega não ter tempo para se exercitar. Foi pensando nisso que desenvolvedores apresentaram aplicativos para smartphones que contam os passos dados pelo usuário ao longo dia e avisam se ele precisa dar uma caminhada. Outros aplicativos, como o Bitwalking, disponível em alguns países asiáticos e africanos, tem o foco levemente diferente. Como em países mais pobres as pessoas precisam caminhar muito para se deslocar, esse aplicativo, além de contar os passos dos usuários, paga pela quantidade de passos dados. A empresa desenvolvedora afirma que a intenção é possibilitar uma renda extra a essas pessoas e conta com outras empresas que apoiam a causa da vida saudável como patrocinadoras.

Mas o que tudo isso tem a ver com grandezas diretamente proporcionais? Perceba que todas as informações dadas podem ser resumidas em: quanto mais passos, mais qualidade de vida, ou, ainda, quanto mais passos, mais dinheiro arrecadado. Perceba que a segunda relação pode ser quantificada, ou seja, passos podem ser contados, assim como dinheiro. Vamos supor que, para cada 10000 passos, se ganhe BW$ 1 (1 dólar de bitwalking). Intuitivamente você percebe que quanto mais passos forem dados, mais dinheiro será arrecadado. Então podemos pensar o seguinte: quantos passos são necessários para chegar a ganhar por ano o que a empresa propõe, BW$ 450,00? Você consegue perceber que basta que seja montado um esqueminha de regra de três para resolver esse problema? Veja:

10000 passos → 1 dólar de bitwalking
x passos → 450 dólares de bitwalking

Fazendo a multiplicação cruzada, chegaremos a:

$$(10000)(450) = (1)(x)$$

$$x = \frac{4500000}{1}$$

$$x = 4500000$$

Então, para conseguir ganhar BW$ 450,00 em um ano, uma pessoa precisa dar 4 milhões e meio de passos! Isso significa que quanto mais essa pessoa caminhar, mais dinheiro vai ganhar. Claramente você percebe uma relação de proporcionalidade, certo? Mais precisamente, uma relação direta de proporcionalidade, já que o crescimento de uma grandeza implica no crescimento da outra. Grandezas diretamente proporcionais também envolvem decréscimo, desde que ele também aconteça nas duas.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Agora vamos pensar numa outra situação. A entrega de uma das tarefas da gincana da sua escola deve ser feita em até 5 dias e a sugestão é que seja realizada por 4 pessoas. Como sua equipe está atrasada, precisa fazer a tarefa o mais rapidamente possível e pretende colocar 10 pessoas para realizá-la. Perceba que quanto mais pessoas trabalharem na tarefa, menos tempo vai demorar para terminá-la. Diferentemente do que aconteceu no problema da caminhada, temos uma relação de “quanto mais, menos”, o que caracteriza uma relação entre grandezas inversamente proporcionais. A resolução é bastante parecida, exceto por um detalhe: é necessário inverter uma parte da regra de três. Veja o procedimento:

4 pessoas — 5 dias
10 pessoas — X dias

A montagem é igual a que estamos acostumados, certo? A parte nova é a da inversão. Você pode escolher qualquer lado para realizá-lo. No caso, fizemos no lado direito:

4 pessoas — 5 dias
10 pessoas — x dias

E agora é só realizar a multiplicação cruzada, como de costume:

4 pessoas — x dias
10 pessoas — 5 dias

Que vai resultar em:

$$(4)(5) = (10)(x)$$
$$10x = 20$$
$$x = \frac{20}{10}$$
$$x = 2$$

Ou seja, se apenas 4 pessoas trabalharem na tarefa, ela será entregue no tempo limite, 5 dias. Mas se 10 pessoas realizarem o trabalho, a tarefa pode ser finalizada em apenas 2 dias! Veja que o número de pessoas aumentou, mas o número de dias diminuiu! Aí está, portanto, uma grandeza inversamente proporcional. Tome cuidado com a interpretação do problema para saber quando ele corresponde a essa situação e quando é a anterior, beleza?

Um caixa expresso de supermercado atende 5 pessoas em 12 minutos. Para atender 15 pessoas que aguardam na fila, o tempo em minutos será:

a) 6
b) 12
c) 24
d) 36
e) 57

Alternativa correta: D

Vinte pessoas realizam um projeto de propaganda eleitoral em 10 dias. Para que 5 pessoas realizem o mesmo projeto, serão necessários:

a) 40 dias
b) 20 dias
c) 10 dias
d) 27 dias
e) 37 dias

Alternativa correta: A

Numa construtora de casas pré-fabricadas, 8 pessoas constroem uma casa em 12 dias. Caso o empresário resolva colocar apenas 3 pessoas para construir uma casa igual, o tempo necessário será de:

a) 5 dias

b) 15 dias

c) 23 dias

d) 28 dias

e) 32 dias

Alternativa correta: E

Podemos transportar uma determinada quantidade de pedras em 20 caminhões com capacidade de 7 m^3 cada. Caso utilize caminhões com capacidade para 14 m^3, precisaríamos de:

a) 7 caminhões

b) 10 caminhões

c) 12 caminhões

d) 14 caminhões

e) 45 caminhões

Alternativa correta: B

ESCALA

Uma amiga sua, fã inveterada do personagem Thor, está fazendo aniversário e você resolve presenteá-la com uma miniatura desse personagem.

MINIATURA DO PERSONAGEM THOR DE OS VINGADORES.

No site em que você está realizando a compra, a única informação sobre as dimensões do produto é “Escala 1:10”. Mas o que isso significa?

Escala é uma outra relação de razão e proporção. É MUITO utilizada em mapas, mas também a encontramos em miniaturas de personagens e carros, por exemplo; serve para que possamos realizar representações de algo muito grande em algo de tamanho acessível, guardando as proporções. A escala é representada por uma razão igualada à outra. A primeira indica que 1 cm na representação (no caso, a miniatura) equivale a 10 cm no real; a segunda é a medida da representação sobre a medida do real. Perceba que dessa forma é possível montar uma regra de três. Veja:

$$\frac{1\,cm}{10\,cm} = \frac{\text{medida representação (cm)}}{\text{medida real (cm)}}$$

É possível descobrir a altura do boneco se soubermos a altura do ator (e vice-versa). Graças à nossa maravilhosa internet, com uma rápida busca, você descobriu que a altura do ator desse personagem é 1,90 m. Agora podemos utilizar essa informação para saber o tamanho do boneco. Mas preste atenção: a unidade deve ser centímetros! Assim, a medida real será 190 cm (já que a medida real em metros é 1,90). Vamos substituir esse valor na proporção acima:

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{190}$$

Fazendo a multiplicação cruzada (que agora você já sabe fazer muito bem), teremos:

$$\frac{1}{10} = \frac{x}{190}$$
$$10x = 190.1$$
$$x = \frac{190}{10}$$
$$x = 19 \ cm$$

Portanto, o tamanho da miniatura é 19 centímetros. Bem simples, né? Você só precisa estar atento às unidades e tomar cuidado para não confundir o real com o representado, ok? Também é importante perceber que nem sempre a escala será de 1:10, ela pode variar bastante dependendo do objetivo. A escala de um mapa pode ser de 1:50000000, por exemplo.

Uma escala de 1/100 representa:

a) a cada uma unidade do desenho, cem unidades reais

b) a cada 100 unidades reais, uma unidade do desenho

c) 10cm do desenho representa 1 metro real

d) 1 metro do desenho é igual a 1 metro real

e) 1 metro do desenho = 1 quilômetro real

Alternativa correta: A

A distância entre dois pontos no mapa é de 50 cm. Sabendo que a distância real é de 10 000 m, a escala utilizada é:

a) 3 : 1.000.000

b) 5 : 20.000

c) 3 : 50

d) 2 : 100.000

e) 1 : 20.000

Alternativa correta: E

PORCENTAGEM

Provavelmente você já ouviu falar muito de assuntos relacionados à porcentagem, como 50% das estudantes são mulheres, 20% dos sapatos foram vendidos, 5% dos alunos não compareceu à prova, entre outros exemplos. Mas o que exatamente o símbolo % representa?

O símbolo "por cento" expressa uma divisão por cem, então 50%, 20%, 5% podem ser expressos como:

$$50\% = \frac{50}{100}$$

$$20\% = \frac{20}{100}$$

$$5\% = \frac{5}{100}$$

Isso significa que, entre 100 estudantes, 50 são mulheres; que de 100 sapatos, 20 foram vendidos, e que, de 100 estudantes, 5 não compareceram à prova. Essa é a interpretação de porcentagem, mas como resolver problemas que a envolvem? Novamente utilizando regra de três!

Você leu uma notícia que informa que o número de vagas na universidade em que você deseja estudar, que é de 5000, aumentará em 10%. Você ficou superanimado, afinal de contas, a chance de você conseguir entrar é um pouco maior. Mas quantas vagas serão ofertadas, afinal?

Sempre que trabalharmos com problemas de porcentagem, faremos relações com o 100%, ou seja, um valor completo. No caso do problema, 5000 é 100% do número de vagas, concorda? Então, se 5000 vagas é igual a 100%, quantas vagas correspondem a 10% a mais, ou seja, a 110%? Consegue perceber a relação de proporcionalidade envolvida? Vamos montar a regrinha de três:

$$\begin{array}{lcl} 5000 \text{ vagas} & — & 100\% \\ x \text{ vagas} & — & 100\% + 10\% \end{array}$$

Realizando a multiplicação cruzada:

$$\begin{array}{lcl} 5000 & — & 100 \\ x & — & 110 \end{array}$$

Montando a equação:

$$(5000)(110) = (x)(100)$$
$$100x = 550000$$
$$x = \frac{550000}{100}$$
$$x = 5500$$

Então, havendo um aumento de 10%, o número de vagas será de 5500. Perceba que, quando há um aumento, somamos esse número ao 100%. Agora vamos para outra situação.

Você quer comprar alguns livros que totalizam um valor de R$ 300,00, mas conseguiu um desconto de 20%. Quanto você irá pagar pelos livros? Se antes tínhamos um aumento, agora temos um decréscimo, um desconto. Por isso, no lugar de somar, devemos diminuir o valor do desconto dos 100%. Além disso, perceba que o valor de 100% é o valor "completo" dos livros. Veja:

$$\begin{array}{lcl} R\$\ 300{,}00 & — & 100\% \\ R\$\ x & — & 100\% - 20\% \end{array}$$

Realizando a multiplicação cruzada, teremos o seguinte:

$$\begin{array}{lcl} 300 & — & 100 \\ x & — & 80 \end{array}$$

Montando a equação:

$$(300)\,(80) = (x)\,(100)$$
$$100x = 24000$$
$$x = \frac{24000}{100}$$
$$x = 240$$

Portanto, com o desconto de 20%, você pagará R$ 240,00 pelos livros.

Está bem! Agora vamos ver um outro caso: sua mãe resolveu te dar um aumento na mesada. Você ganhava R$ 400,00 e, a partir do próximo mês, passará a receber R$ 450,00. Quantos por cento sua mesada aumentou?

A resolução desse problema não difere muito do que fizemos até agora, apenas preste atenção no detalhe final, ok? Vamos montar a regra de três:

R$ 400,00 — 100%
R$ 450,00 — x

Resolvendo a multiplicação cruzada, teremos:

$$(400)\,(x) = (450)\,(100)$$
$$400x = 45000$$
$$x = \frac{45000}{400}$$
$$x = 112{,}5$$

Aqui é que precisamos ter calma. Relembre a pergunta “quantos por cento sua mesada aumentou?”. A resposta não é essa que encontramos. Lembre-se: somamos a porcentagem ao 100 quando temos um aumento; diminuímos quando temos um desconto – exatamente o que foi feito nos problemas anteriores. Então, para saber qual foi o aumento é necessário fazer:

$$100 + x = 112{,}5$$
$$x = 112{,}5 - 100$$
$$x = 12{,}5\%$$

Portanto, o aumento na sua mesada foi de 12,5%! Beleza? Mas e se você tivesse recebido um corte na mesada em vez do aumento e ela baixasse para R$ 320,00, quantos por cento teria sido essa diminuição? Vamos montar a regrinha:

R$ 400,00 — 100%
R$320,00 — x

Resolvendo, chegaremos a:

$$(400)\,(x) = (320)\,(100)$$
$$400x = 32000$$
$$x = \frac{32000}{400}$$
$$x = 80$$

Atenção! O seu desconto não foi de 80%, não é mesmo? Lembre que precisamos diminuir esse valor do 100%.

$$100 - x = 80$$
$$100 - 80 = x$$
$$x = 20\%$$

Portanto, o corte na sua mesada teria sido de 20%. É bem importante que você lembre de fazer essas adições e ou subtrações finais, tá bom?

Uma casa cujo preço médio é de R$ 150.000,00 foi vendida por um preço 30% acima do preço médio do mercado. Sendo assim, por quando a casa foi vendida?

a) 200000

b) 195000

c) 180000

d) 160000

e) 155000

Alternativa correta: B

Uma determinada turma regular de Ensino Médio em uma escola de Porto Alegre possui 26 alunas e 14 alunos. Qual é o percentual de alunas nesta turma?

a) 50%

b) 70%

c) 60%

d) 55%

e) 65%

Alternativa correta: E

Uma loja ofereceu uma promoção de queima de estoque, exclusiva para este final de semana! Todos os produtos com 15% de desconto! Ao comprar uma calça cujo preço é R$ 80,00, qual é o valor do desconto oferecido pela loja de acordo com esta promoção?

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 20

Alternativa correta: B

Uma calça de preço R entra em liquidação após o natal. Entretanto, apesar da loja oferecer um desconto de 40%, ninguém comprou o produto. Passando o período de promoção, o gerente decidiu aumentar o preço da calça em 40%, desta forma o preço final após um desconto de 40% e um aumento de 40% sofre...

a) um aumento de 10%

b) um desconto de 10%

c) um aumento de 16%

d) um desconto de 16%

e) permanece com o mesmo preço antes de qualquer aumento ou desconto.

Alternativa correta: D

REFERÊNCIAS

Bitwalking. Disponível em: <http://www.bitwalking.com/> Acesso em 26.10.2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PARTE I

MATEMÁTICA

06

GEOMETRIA PLANA II
TRIÂNGULOS

meSalva!

GEOMETRIA PLANA II - TRIÂNGULOS

ÂNGULOS

Nesse período intenso de estudos que você está vivendo, já deve ter passado por situações em que sentia dor nas costas devido à má postura durante a leitura de suas apostilas, certo? Essas dores acometem geralmente pessoas que passam bastante tempo sentadas trabalhando/estudando. Por esse motivo, é importante que as cadeiras utilizadas por essas pessoas sejam adequadas a seus corpos e a seus postos de trabalho e, ainda, que estejam com o encosto na inclinação correta, para evitar desconfortos posteriores. Essa inclinação é dada por um ângulo entre as costas e as pernas do trabalhador/estudante, de modo que ele fique confortável para realizar suas tarefas.

Pensando nessa questão, vamos aprender a partir de agora quais são os tipos de ângulos que existem e como eles se relacionam com o nosso cotidiano. Você vai ver que trabalha com ângulos muito mais do que imagina: desde a rua íngreme que você pretende subir de bicicleta até o cálculo mental que precisa fazer para encaçapar uma bola num jogo de sinuca.

ÂNGULO RETO

É formado por duas retas perpendiculares, resultando em um ângulo de 90°. É representado como um quadrado com um pontinho no meio, como é possível ver na figura abaixo. Esses ângulos são vastamente utilizados. É possível observá-los em cantos de portas, em quinas de mesas e de goleiras, no encontro entre a parede e o chão, entre outros diversos exemplos.

IMAGEM 1: CANTO DE GOLEIRA E ÂNGULO RETO.

ÂNGULO AGUDO

Os ângulos menores do que 90° são denominados ângulos agudos. Dentre as inúmeras aplicações, estão as rampas de acesso para pessoas com deficiência ou para garagens de automóveis.

IMAGEM 2: RAMPA E ÂNGULO AGUDO.

ÂNGULO OBTUSO

Os ângulos maiores do que 90° são chamados de ângulo obtusos. Você encontra ângulos desse tipo enquanto lê essa apostila, certo?

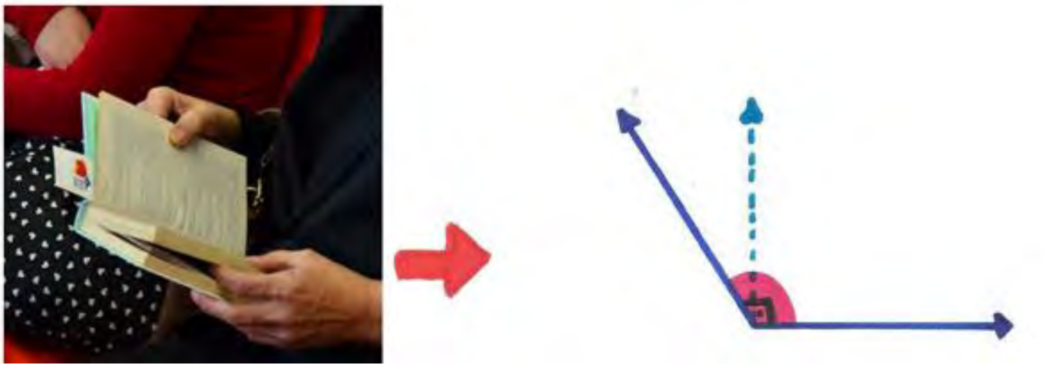


IMAGEM 3: ABERTURA DE UM LIVRO E ÂNGULO OBTUSO.

Agora que já sabemos os "nomes" de cada tipo de ângulo, vamos ver como eles se relacionam entre si?

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

Temos ângulos complementares se a soma dos ângulos resulta em 90°:

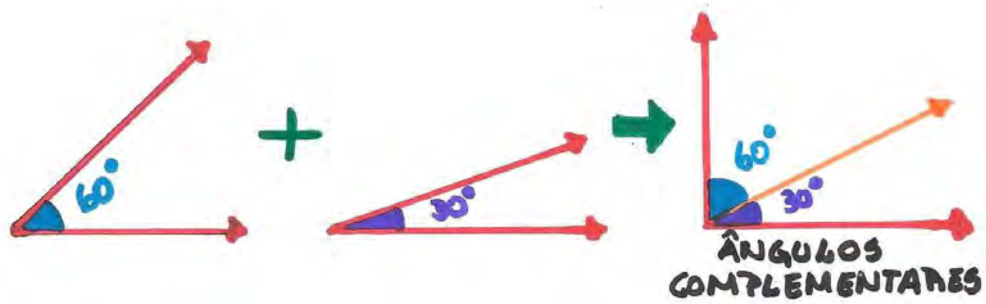


IMAGEM 4: SOMA DE ÂNGULOS FORMANDO ÂNGULOS COMPLEMENTARES.

Mas, se a soma resultar em 180°, teremos, então, ângulos suplementares:

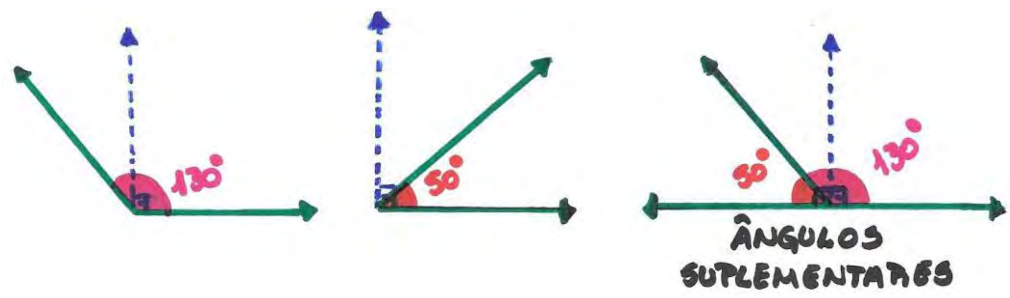


IMAGEM 5: SOMA DE ÂNGULOS FORMANDO ÂNGULOS SUPLEMENTARES.

Podemos, ainda, fazer relações entre os ângulos formados entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal. A "interação" entre os ângulos que será abordada nessa etapa vai nos ajudar bastante e sempre!

ÂNGULOS ALTERNOS INTERNOS

São ângulos formados entre as retas paralelas. Assim, no caso dos ângulos abaixo, d é o ângulo alterno interno de f e c é alterno interno de e.

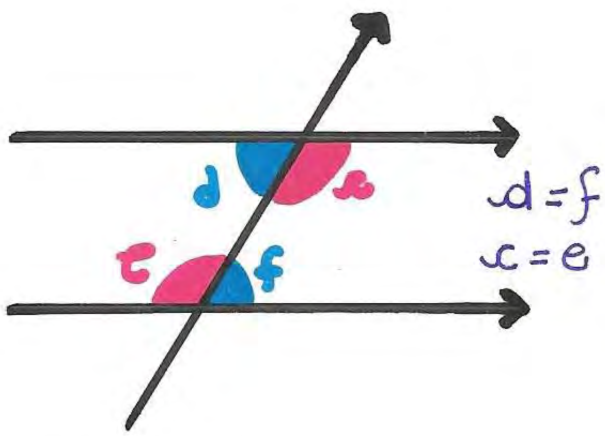


IMAGEM 6: REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS ALTERNOS INTERNOS.

ÂNGULOS ALTERNOS EXTERNOS

São os ângulos formados acima ou abaixo das retas paralelas. No caso abaixo, a é alterno externo de g e b é alterno externo de h.

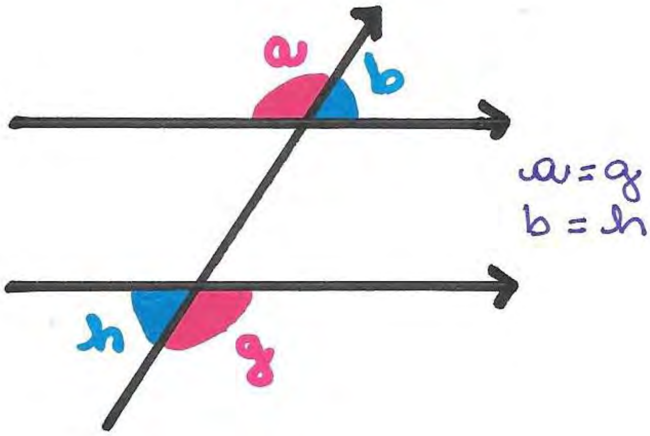


IMAGEM 7: REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS ALTERNOS EXTERNOS.

ÂNGULOS COLATERAIS INTERNOS

Ângulos colaterais entre duas retas paralelas, se somados, devem resultar em 180° e portanto, também são ângulos complementares. Como são internos, são os ângulos entre as retas paralelas.

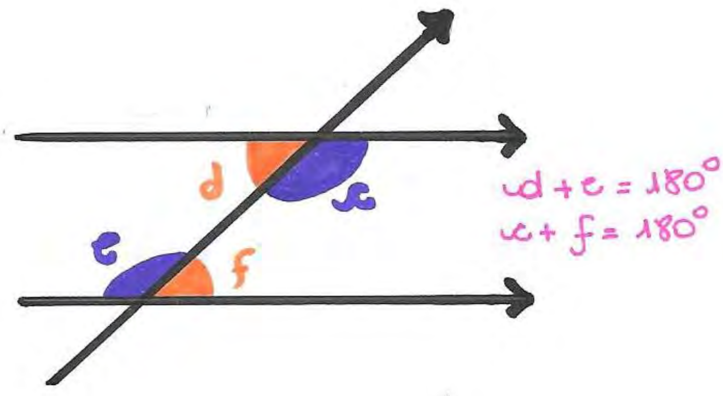


IMAGEM 8: REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS COLATERAIS INTERNOS.

Perceba que além de d + e = 180 e c + f = 180, os ângulos d + c e e + f também resultam em 180°.

ÂNGULOS COLATERAIS EXTERNOS

Já sabemos que a soma deles deve resultar em 180°. Como são externos, são os ângulos acima ou abaixo das retas paralelas

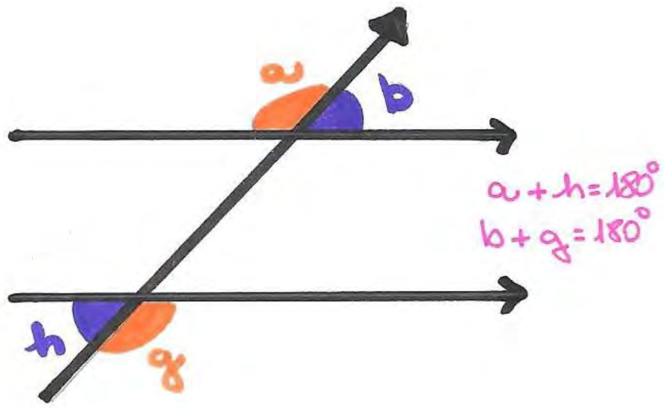


IMAGEM 9: REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS COLATERAIS EXTERNOS.

Assim como no caso anterior, note que além de a + h = 180° e b + g = 180°, os ângulos a + b e h + g também resultam em 180°.

ÂNGULOS CONGRUENTES

São ângulos iguais! Perceba que a primeira reta horizontal cortada pela transversal tem os mesmos ângulos que a segunda reta horizontal cortada pela mesma transversal.

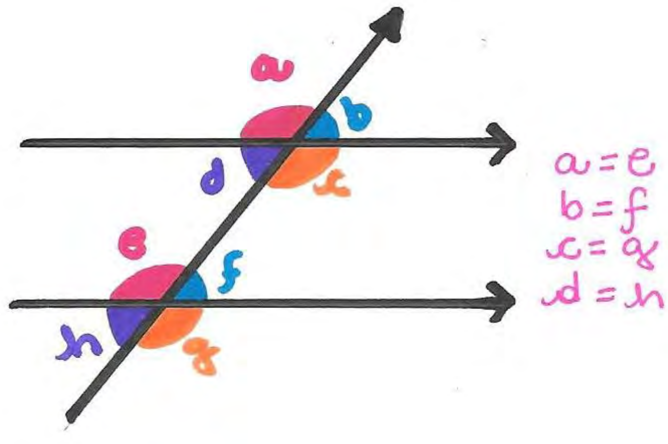


IMAGEM 10: REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS CONGRUENTES.

Ótimo! Agora que já vimos tudo isso, que tal voltarmos ao problema inicial da postura na cadeira? Dê uma olhada na figura abaixo:

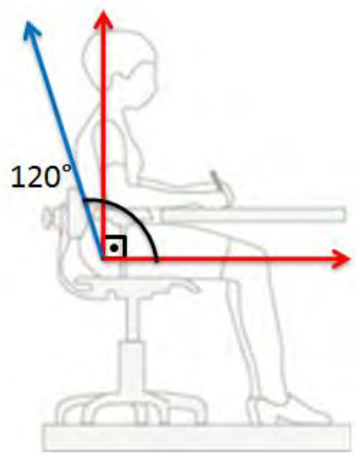


IMAGEM 11: INCLINAÇÃO DAS COSTAS DE UMA PESSOA ENQUANTO ESTUDA.

Perceba que temos um ângulo reto (de 90°) e um ângulo obtuso de 120°, né? Então, segundo a ergonomia, o ângulo formado entre as pernas e as costas do estudante deve estar entre 90° e 120° para evitar problemas na coluna. É claro que não é apenas isso que conta para que a pessoa tenha uma boa postura ao ficar nessa posição. Também há a questão da altura da mesa, da altura da cadeira, etc., mas é importante que você perceba como os ângulos estão presentes onde menos esperamos!

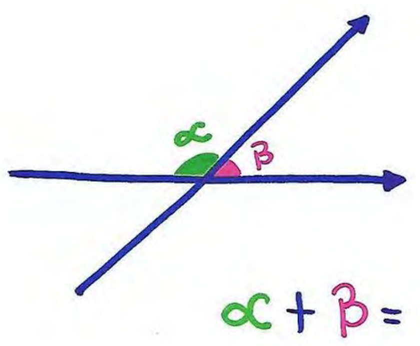
Na próxima seção faremos relações entre esses ângulos que já estudamos e os triÂNGULOS, mas antes resolva os exercícios abaixo.

O ângulo complementar o 40° é:

a) 40°
b) 20°
c) 140°
d) 320°
e) 50°

Alternativa correta: E

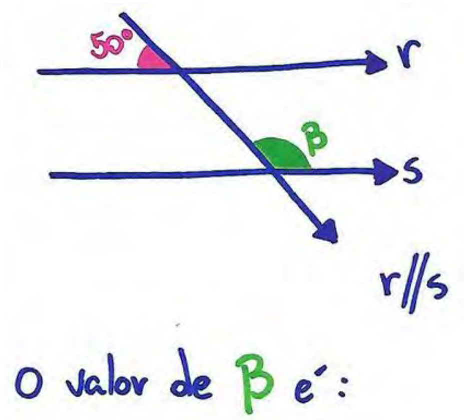
Quanto vale a soma dos ângulos da figura abaixo?



a) 0°
b) 45°
c) 90°
d) 180°
e) 360°

Alternativa correta: D

Na figura abaixo, quanto vale o ângulo β?



a) 50°

b) 40°

c) 25°

d) 130°

e) 310°

Alternativa correta: D

TRIÂNGULOS

Você, com certeza, tem bastante familiaridade com triângulos desde a infância, quando aprendeu as formas geométricas (juntamente com o quadrado e o círculo), mas já parou para pensar nas inúmeras aplicações dessa forma e o quanto ela é utilizada? Assim como você manipula triângulos desde criancinha, a humanidade os explora desde as primeiras civilizações, utilizando-os em construções ou para calcular distâncias impossíveis de medir, como a distância da Terra à Lua, e ainda para saber as horas, com os relógios de sol. Então, já que os triângulos são tão importantes, vamos abordar quais são seus principais tipos?

Primeiramente, a soma dos três ângulos de um tri-ângulo é SEMPRE 180°. Se a conta não fechar, ou não está certa, ou não é um triângulo, ok? Se você quiser ver a prova disso, dá uma olhada nos Apêndices dessa apostila. Contudo, os ângulos de um triângulo podem variar, fazendo com que eles, apesar de triângulos, tenham configurações diferentes. É isso que veremos a partir de agora!

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Pense nesse triângulo como um retângulo cortado na diagonal. Isso significa que um dos ângulos será de 90° e os outros dois se complementam (a soma resulta em 90°, lembra?), para que, ao todo, tenhamos 180°. Consegue enxergar um triângulo retângulo (ou vários) nas gangorras da figura abaixo? Essa é apenas uma das formas de encontrá-lo no nosso dia a dia.

IMAGEM 12: GANGORRAS E TRIÂNGULO RETÂNGULO.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Triângulos equiláteros possuem os três lados iguais (equi = igual, latero = lado) e os três ângulos iguais. Isso significa que seus ângulos só podem medir 60° (60° x 3 = 180°). Na imagem abaixo, em cada lado do triângulo cabem 5 bolas de sinuca; assim, temos um triângulo equilátero.

IMAGEM 13: TRIÂNGULO ORGANIZANDO BOLAS DE SINUCA E TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

Triângulo qualquer: Percebe que o telhado da construção da figura é bastante irregular, certo? Então, um triângulo qualquer, além de ter medidas de lados diferentes, possui ângulos diferentes.

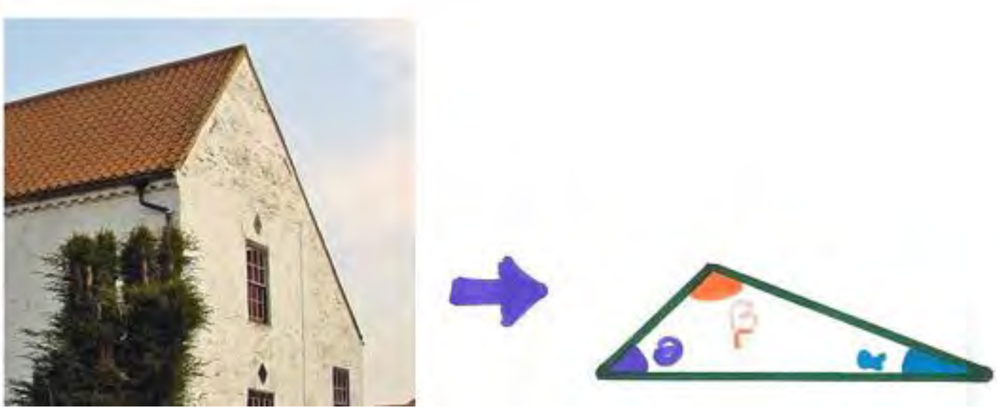


IMAGEM 14: TELHADO IRREGULAR E TRIÂNGULO QUALQUER.

Agora que você já sabe quais são os tipos de triângulo, vamos dar uma olhada no relógio de sol da figura abaixo.

IMAGEM 15: RELÓGIO DE SOL.

Ao centro, temos um triângulo retângulo que, conforme o Sol incide, forma uma sombra, indicando o horário. Genial, né? É por isso que os triângulos são tão amados e você vai amá-los também! ;)

Resolva os exercícios abaixo:

A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é:

a) 90°

b) 100°

c) 150°

d) 180°

e) 360°

Alternativa correta: D

O valor dos ângulos em um triângulo equilátero, obrigatoriamente é:

a) 30°

b) 60°

c) 80°

d) 90°

e) 180°

Alternativa correta: B

A partir de agora seremos capazes de realizar cálculos utilizando os triângulos. Primeiramente, vamos utilizar os lados para depois podermos relacionar os ângulos. Animado? Então, vamos lá!

PITÁGORAS

Considere uma situação em que você quer construir uma casinha para seu cachorro e decidiu seguir o desenho abaixo.

IMAGEM 16: REPRESENTAÇÃO DA CASINHA DO CACHORRO.

A base foi fácil e você já fez: é um cubo de 80 centímetros de lado. A próxima etapa é construir o telhado. Você já definiu que ele terá 30 centímetros de altura (a partir da base), mas agora precisa saber o tamanho das madeiras que deve comprar para as laterais desse telhado, que formam um triângulo. E agora?

Como resolver esse problema? Temos aqui relações trigonométricas e geométricas envolvidas e, para resolvê-lo, será necessário que você domine o Teorema de Pitágoras, que abordaremos a seguir!

TEOREMA DE PITÁGORAS

Para que possamos entender alguns conceitos, costumamos iniciar por situações mais simples. Então dá uma olhada nesse triângulo aí embaixo. Sabendo que um dos ângulos dele é de 90° você já consegue perceber que é um triângulo retângulo, né?

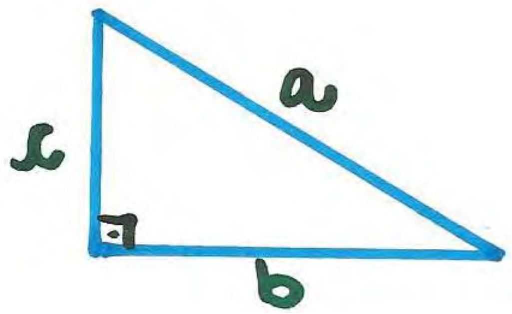


IMAGEM 17: TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Beleza! O tal Teorema de Pitágoras apresenta uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, dada por essa equação aí embaixo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

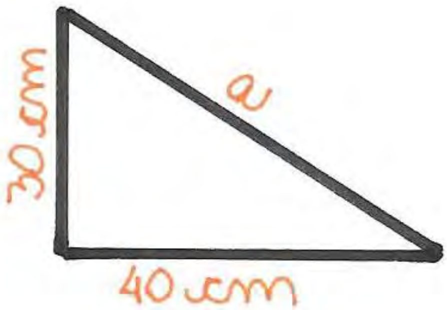
Se você quiser, pode ver a demonstração desse teorema no Apêndice, ok?

Cada um desses lados tem um "nome" diferente. Então, a é a hipotenusa e b e c os catetos. Essa relação possibilita que a gente calcule a, b ou c tendo informação sobre os outros dois.

Tá, mas e como isso influencia no problema da casinha do cachorro? Vamos ver!

Vamos lembrar que a base da casinha tem 80 centímetros de lado e que é um cubo, ou seja, todos os seus lados são iguais. Além disso, você já tinha definido que a altura do telhado seria de 30 centímetros, certo? Então, vamos colocar isso em uma desenho, assim fica mais fácil de perceber:

Ok, mas não temos como aplicar o Teorema de Pitágoras da forma como desenhamos nosso triângulo, afinal, é necessário que seja um triângulo retângulo para funcionar, certo? Então, vamos tentar de outra forma; vamos cortar esse triângulo ao meio, nomeando a parte que queremos identificar como a.



Opa! Agora já temos algo que nos interessa! Está exatamente na mesma forma que vimos antes. Queremos encontrar justamente a, que é o tamanho da madeira que você precisa comprar. Então, vamos aplicar o teorema!

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 30^2 + 40^2$$
$$a = \sqrt{30^2 + 40^2}$$
$$a = \sqrt{2500}$$
$$a = 50 \text{ centímetros}$$

Agora você já sabe, portanto, que precisa comprar quatro pedaços de madeira de 50 cm de comprimento para construir a base do telhado e fez isso utilizando Pitágoras! O seu amigo canino agora tem um abrigo! =D

Resolva os exercícios abaixo:

O único triângulo retângulo abaixo é:

a) 1 , 2 , 3
b) 3 , 3 , 5
c) 12 , 16 , 20
d) 16 , 20 , 50
e) 10 , 10 , 100

Alternativa correta: C

Para que um triângulo com catetos 5cm e 12cm seja retângulo , o valor da hipotenusa deve obrigatoriamente ser:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Alternativa correta: D

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Enquanto alguns estudantes, durante as férias, vão à praia ou ficam na cidade, Beto foi visitar seus tios em um lugar privilegiado no interior. Depois de tanto descansar, Beto pediu que seu tio o deixasse ajudar em uma tarefa específica: a construção de uma ponte para que fosse mais fácil visitar os parentes do outro lado do rio. O grande problema é que o tio não sabia qual era a distância entre uma margem e outra.

Felizmente, Beto prestou bastante atenção às aulas de geometria e explicou ao tio que era uma questão simples de resolver utilizando o método da paralaxe e a semelhança de triângulos. Com algumas medidas de um lado do rio, poucos minutos depois Beto já tinha conseguido o resultado da distância. Você tem ideia de como Beto resolveu esse problema tão facilmente? Então, vamos dar uma olhada nesses conceitos de semelhança, assim ficará mais claro!

IMAGEM 18: PLATAFORMA SOBRE O RIO EM QUE O TIO DE BETO QUER CONSTRUIR UMA PONTE.

A semelhança de triângulos pode ser entendida da seguinte forma. Vamos traçar uma linha DE paralela ao lado AB do triângulo abaixo:

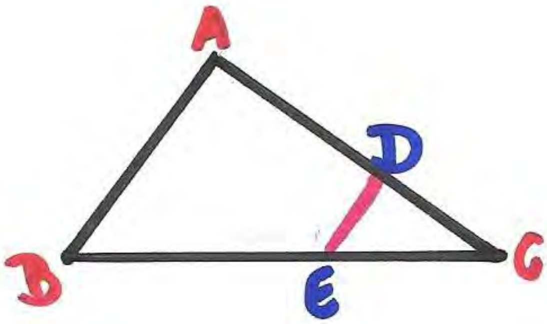


IMAGEM 19: TRIÂNGULO CORTADO POR UMA RETA DE.

Consegue perceber que podemos desenhar dois triângulos a partir disso? Olha aí:

 |

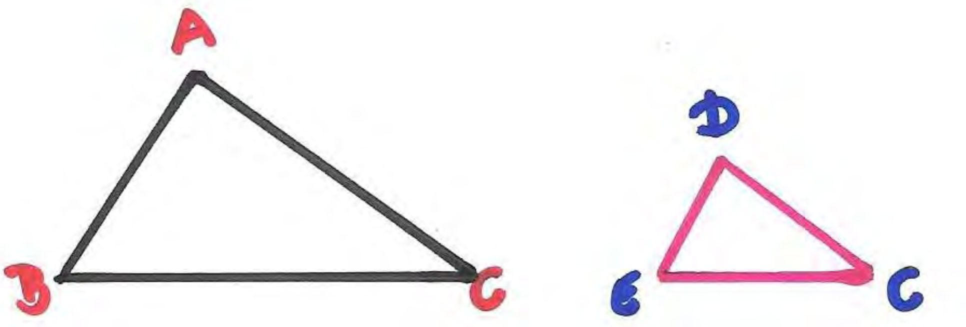


IMAGEM 20: DOIS TRIÂNGULOS FORMADOS A PARTIR DA FIGURA ANTERIOR.

E, a partir dessa "semelhança" entre esses dois triângulos, que na verdade são um só, chegaremos à relação entre os lados dos triângulos, que será bastante útil no futuro:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$$

Para tentar facilitar a visualização de triângulos semelhantes, é interessante entender como eles podem aparecer nos nossos problemas. Preste atenção:

1ª situação: os triângulos possuem dois ângulos congruentes.

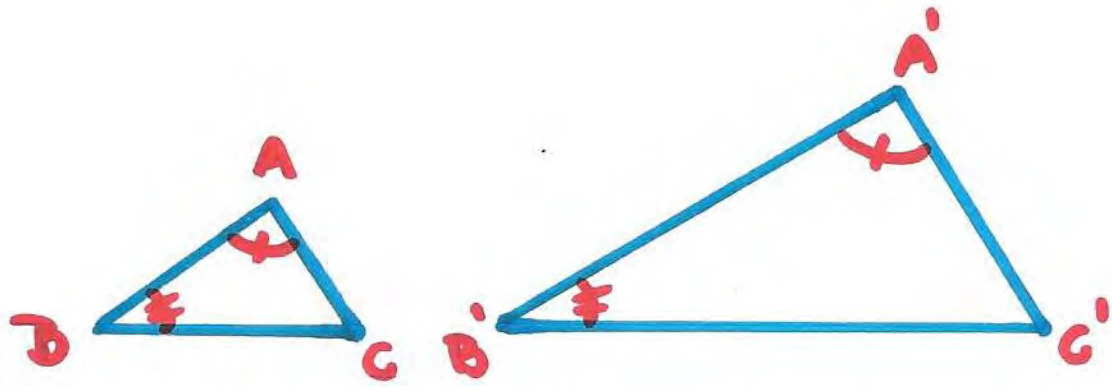


IMAGEM 21: TRIÂNGULOS SEMELHANTES A PARTIR DE DOIS ÂNGULOS CONGRUENTES.

Note que, como há dois ângulos congruentes (iguais) entre os triângulos, o terceiro ângulo, por consequência, também será congruente.

2ª **situação:** dois lados dos triângulos são proporcionais e os ângulos entre esses lados são congruentes.

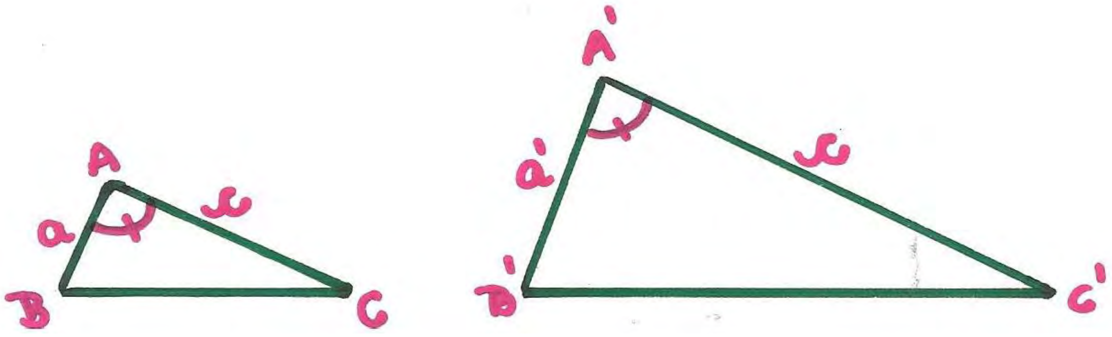


IMAGEM 22: TRIÂNGULOS SEMELHANTES A PARTIR DE DOIS LADOS PROPORCIONAIS E UM ÂNGULO CONGRUENTE.

Como temos dois lados proporcionais (com ângulos entre eles congruentes), por consequência, o terceiro lado deles também será proporcional.

3ª **situação:** os três lados dos triângulos são proporcionais.

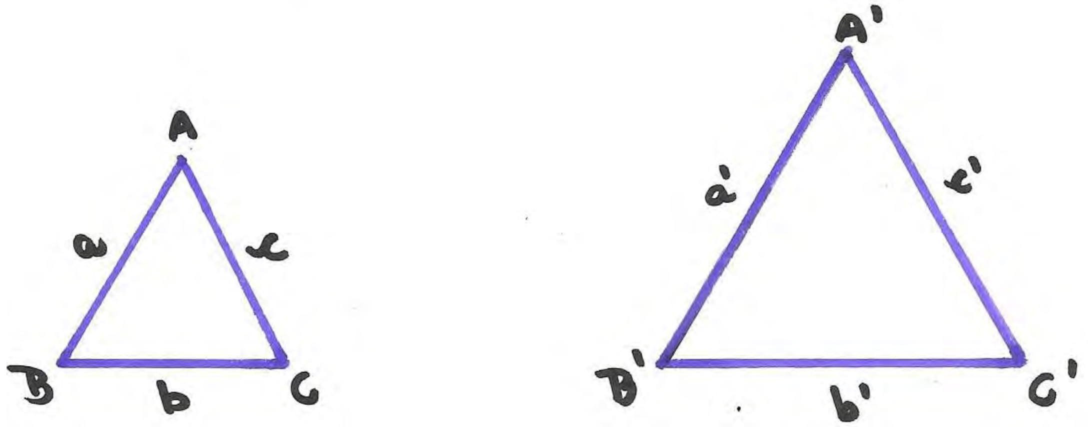


IMAGEM 23: TRIÂNGULOS SEMELHANTES A PARTIR DOS LADOS PROPORCIONAIS.

Ótimo! Então, agora que já entendemos como a semelhança de triângulos funciona, vamos ver o que o Beto fez para calcular a largura do rio. Vamos fazer um esquema como se fosse visto do alto do rio para facilitar, ok? Perceba que, se Beto estivesse no ponto B, ele teria a visão em linha reta até o outro lado do rio, no ponto A; já se Beto estivesse no ponto C, teria uma leve inclinação nessa linha (na linha de visão). Podemos traçar um triângulo imaginário com ABC, certo? As dimensões da plataforma em que o Beto se encontra foram medidas por ele mesmo. Assim, ele sabe que BC vale 3 m. Para poder usar a semelhança de triângulos, Beto traça uma reta DE (que vale 2 m, já que é a largura da plataforma) e mede o segmento CE, chegando ao valor de 0,5 m.

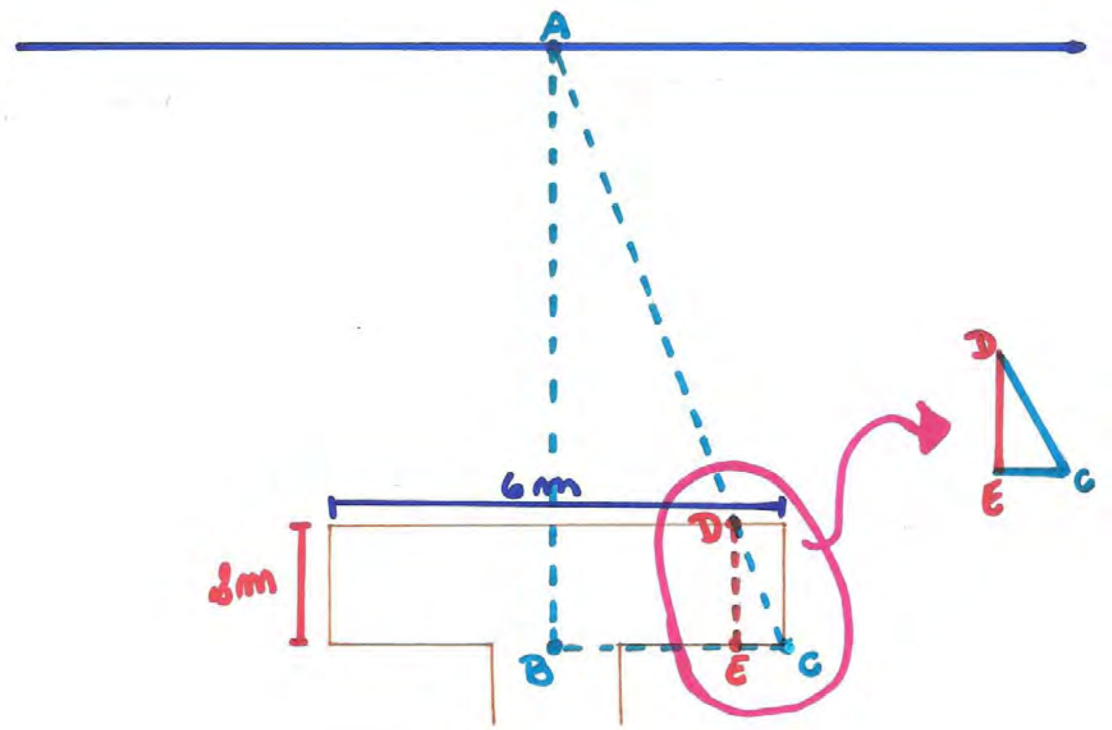


IMAGEM 24: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA DISTÂNCIA ENTRE A PLATAFORMA DE UM LADO DO RIO ATÉ O OUTRO LADO.

Agora que ele já traçou os triângulos e sabe os valores dos lados que interessam, basta aplicar a relação da semelhança de triângulos para encontrar a largura do rio:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{3}{0,5}$$

$$AB = 6.2$$

$$AB = 12\ m$$

O segmento AB vale 12 m, mas não necessariamente essa é a largura do rio, concorda? Lembra que ele está considerando 2 m de largura da plataforma. Então, no fim das contas, a distância entre uma margem do rio e a outra é de 10 m. Assim, o tio do Beto resolveu o problema, com a ajuda da nossa maravilhosa geometria e do método da paralaxe! Aliás, esse método é muito utilizado pelos astrônomos/astrofísicos para calcular a distância de estrelas!

Resolva os exercícios abaixo:

Quando dizemos que dois triângulos são semelhantes, podemos concluir que eles

a) são iguais

b) possuem dois lados iguais

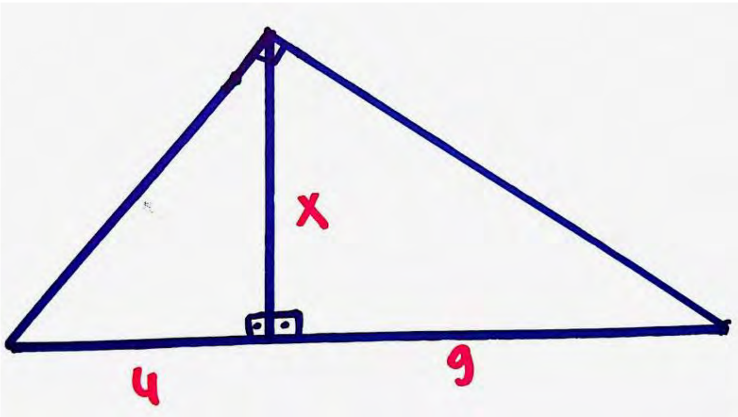
c) possuem lados iguais, porém talvez ângulos diferentes

d) possuem ângulos iguais, porém talvez lados diferentes

e) possuem a mesma área

Alternativa correta: D

Qual a medida do segmento x?



a) 5

b) 6

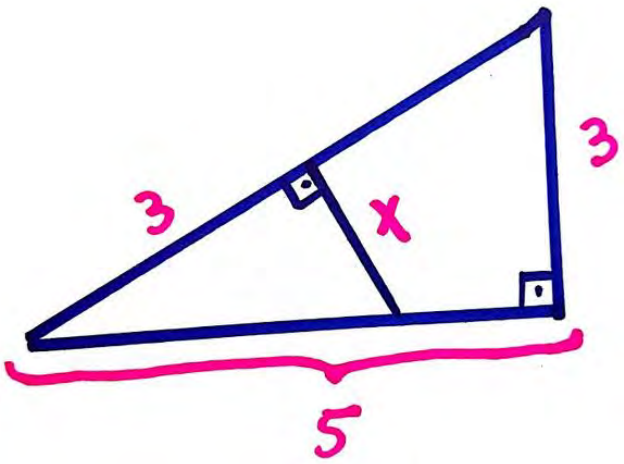
c) 7

d) 8

e) 9

Alternativa correta: B

Qual a medida do segmento x?



a) 1,2

b) 1,4

c) 1,6

d) 1,8

e) 2

Alternativa correta: D

TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Agora que você está imerso no mundo da Geometria e da Trigonometria, deve estar enxergando ângulos e triângulos por todos os lados, certo? Então, se eu dissesse que sei a altura de uma escada e qual é a distância entre ela e a parede, você conseguiria dizer qual é o ângulo formado entre a escada e o chão?

IMAGEM 25: ÂNGULO FORMADO ENTRE O CHÃO E A ESCADA.

Vamos pensar: utilizando seus conhecimentos sobre ângulos, você certamente diria que é um ângulo agudo, já que é menor do que 90°; como você sabe quais são os tipos de triângulos mais comuns, acertaria em dizer que a escada apoiada na parede forma um triângulo retângulo; utilizando o teorema de Pitágoras, conseguiria calcular qual é a altura dessa parede, assim como utilizando a semelhança de triângulos.

Então, mesmo com todos esses conhecimentos, não seria possível, ainda, responder qual é o ângulo que estamos procurando, certo? Para tornar isso possível, vou te levar agora para entender a trigonometria do triângulo retângulo, que envolve os ângulos desse triângulo e seus lados, fazendo relações entre as razões dos lados e o ângulo.

Primeiramente, vamos considerar a representação de um triângulo retângulo:

IMAGEM 26: REPRESENTAÇÃO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM SEUS LADOS IDENTIFICADOS.

Você precisa estar atento a um detalhe quando for analisar os lados de um triângulo retângulo: quais são os catetos? Precisamos diferenciá-los em cateto oposto e em cateto adjacente. Bom, primeiramente, você precisa definir qual é o ângulo que está interessado. Essa é a chave! Depois que esse ângulo for definido, o cateto oposto é aquele em que nenhum lado encosta no ângulo; já o cateto adjacente é aquele que faz parte do ângulo. Assim ficou mais fácil, né? Vamos partir para a segunda parte. Podemos calcular os senos, cossenos e tangentes dos ângulos utilizando as relações dos casos abaixo.

Caso 1 - cálculo do seno de um ângulo

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CO}{H}$$

Caso 2 - cálculo do cosseno de um ângulo

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$$

Caso 3 - cálculo da tangente de um ângulo

$$tg\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{CO}{CA}$$

É muito detalhe para decorar? Então, tenta gravar como SOH-CAH-TOA. A primeira sílaba nos dá a relação do primeiro caso (**S**eno cateto **O**posto **H**ipotenusa); em seguida temos a relação do cosseno (**C**osseno cateto **A**djacente **H**ipotenusa) e por último a razão da tangente (**T**angente cateto **O**posto cateto **A**djacente). A ordem importa, viu? A primeira letra é o que vem antes da igualdade, depois temos o numerador e por fim o denominador.

Agora que entendemos isso, vamos voltar ao nosso problema inicial. Como calcular aquele ângulo? Vamos ver quais são os catetos para saber qual das relações utilizar.

IMAGEM 27: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO TRIÂNGULO FORMADO ENTRE A ESCADA, O CHÃO E A PAREDE E SEUS LADOS.

Temos informação apenas sobre o cateto adjacente, que sabemos que vale 2 m, e sobre a hipotenusa, que vale 5 m. Relembrando o SOH-CAH-TOA, percebemos que o mais simples é utilizar o CAH, ou seja, o cosseno do ângulo. Perceba que podemos descobrir qual é o valor do cateto oposto a partir do teorema de Pitágoras, mas esse não é o nosso foco agora. Então vamos aplicar esses valores às razões que aprendemos antes:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

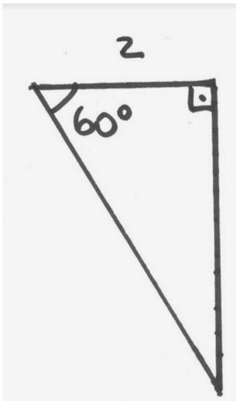
$$\cos\alpha = \frac{2}{5}$$

$$\cos\alpha = 0{,}4$$

Ótimo! Encontramos o cosseno do nosso tão querido ângulo. Mas, peraí! A questão não era encontrar o cosseno do ângulo, mas encontrar o ângulo! Tanto o cosseno, quanto o seno e a tangente possuem valores tabelados para os ângulos. Então, para saber qual é o ângulo precisamos consultar uma tabela ou utilizar a calculadora. Procurando na tabela de cossenos qual é o ângulo que equivale a 0,4 chegaremos em 66,42^{o} (supondo que a nossa tabela é super completa e que tem a informação sobre todos os ângulos). Assim, o ângulo que a escada faz com o chão é de 66,42^{o}.

Resolva os exercícios a seguir:

Sabendo que o cosseno de 60^{o} vale 0,5, qual o valor da hipotenusa do triângulo a seguir?



a) 2

b) 0,5

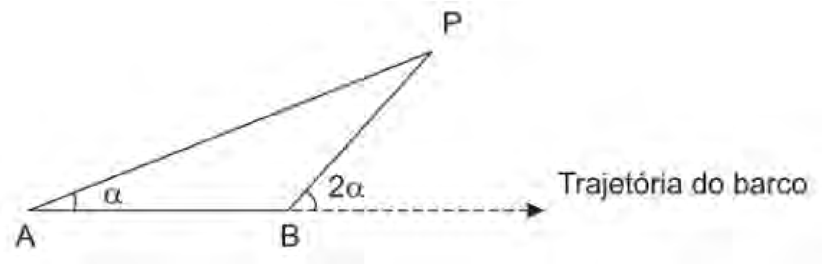
c) 1

d) 3

e) 4

Alternativa correta: E

(ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^o$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000

b) $1000\sqrt{3}$

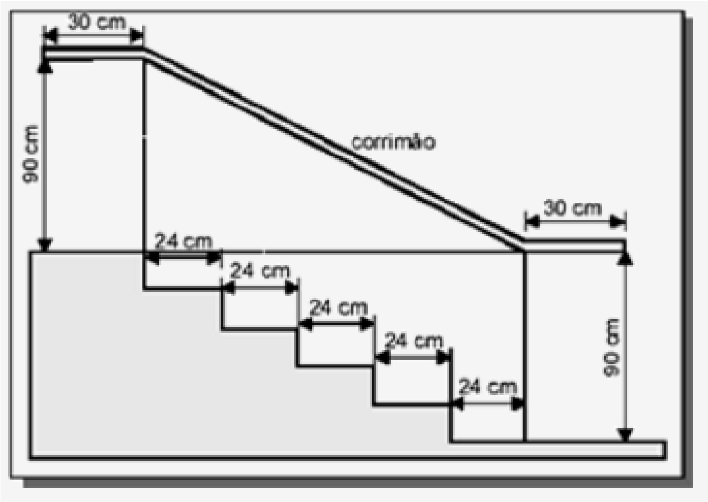
c) $\frac{2000\sqrt{3}}{3}$

d) 2000

e) $2000\sqrt{3}$

Alternativa correta: B

(ENEM) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



a) 1,8

b) 1,9

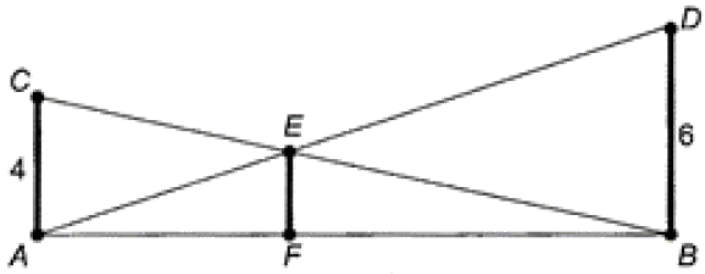
c) 2

d) 2,1

e) 2,2

Alternativa correta: D

(ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1

b) 2

c) 2,4

d) 3

e) 3,5

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. São Paulo: FTD, 2000. 670 p.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa: 1ª série - ensino médio. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. 3 v.

PARTE I

MATEMÁTICA

07

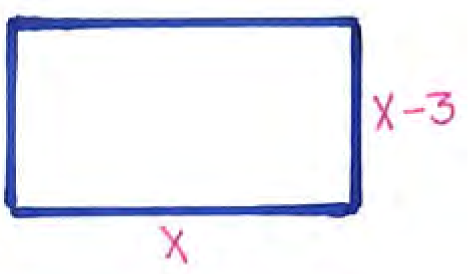
ÁLGEBRA II
EQUAÇÕES E SISTEMAS

meSalva!

ÁLGEBRA II - EQUAÇÕES E SISTEMAS

EQUAÇÕES DE 2º GRAU COMPLETAS

Você foi encarregado de construir uma mesa retangular para o seu avô, que, segundo os cálculo dele, deve ter 10 m2. Ele te informou que um lado deve ter 3 metros a menos que o outro. Para saber exatamente o tamanho dos lados dessa mesa – e como você está sacando tudo de álgebra – você resolveu equacionar esse problema chamando um lado de x (já que você não sabe o tamanho), o outro de x - 3 (já que esse deve ser 3 metros menor do que o outro) e igualou o produto dos dois lados a 10, que é a área total dessa mesa. Isso porque você sabe que a multiplicação dos lados de um retângulo fornece a área dele. Veja como ficou:



E então você montou a equação:

$$(x)(x-3) = 10$$

Nos problemas que estudamos em Álgebra I, você simplesmente isolava o x e conseguia chegar ao resultado da equação, certo? Vamos tentar aplicar esse raciocínio nessa equação. Lembre de aplicar a distributiva entre os dois primeiros termos. Acompanhe abaixo:

$$(x)(x-3) = 10$$
$$x^2 - 3x = 10$$

Isolamos o x. E agora, como resolver o restante dessa equação? Veja que o expoente do primeiro x é 2 e que o do segundo x é 1 (que foi omitido). Então o maior grau dessa equação é 2, o que caracteriza uma Equação de 2º Grau. Vamos utilizar uma fórmula para resolver esse tipo de equação, mas antes é importante deixar nossa equação em um formato específico, igualando-a a zero. Para isso, vamos passar o 10 para o outro lado da igualdade. Lembre que, se fizer isso, o sinal deverá ser invertido. Veja:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

E podemos ainda reescrevê-la dessa forma, sem omitir o número que está multiplicando o primeiro termo:

$$1x^2 - 3x - 10 = 0$$

Esses números são chamados de coeficientes e cada um deles recebe um "nome". No caso do multiplicador do x2, o nome é a, no caso do multiplicador do x, é b; no caso do termo que não multiplica x, o termo independente, é c.

$$\underbrace{1}_{a}x^2\underbrace{-3}_{b}x\underbrace{-10}_{c} = 0$$

Sabendo isso, vamos "guardar" esse conhecimento e ver como resolver essa equação a partir da Fórmula de Bhaskara e a partir da Soma e Produto.

FÓRMULA DE BHASKARA

Como vimos na apostila de História da Matemática, os historiadores não atribuem a Akira Bhaskara a invenção da fórmula que leva seu nome. De qualquer forma, continuamos utilizando essa nomenclatura para nos referimos à fórmula abaixo, que é a equação utilizada para encontrar os valores de x que satisfazem a equação de 2º grau estudada a partir dos coeficientes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

O “mais ou menos” é colocado na frente da raiz porque devemos analisar o resultado dela de duas formas, já que, por exemplo, o resultado da raiz quadrada de 4 é 2, mas se estivermos analisando $x^2 = 4$ então o x pode ser tanto 2 quanto -2, percebe? Isso porque (-2)2 = 4 e (2)2 = 4 também, assim, nessa análise precisamos avaliar se o número que foi elevado ao quadrado foi positivo ou negativo e por isso representamos com um $\pm$ antes da raiz. Nada estranho para você até agora, né? O “triângulo” da raiz quadrada é uma letra grega chamada delta, que define o discriminante e é igual ao que consta abaixo:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

O discriminante é muito importante, já que ele diz quantas e como são as raízes da equação investigada. É interessante analisá-lo antes de sair aplicando a fórmula desesperadamente. Veja:

- ✓ Se $\Delta > 0$: A equação tem duas raízes reais e distintas.
- ✓ Se $\Delta = 0$: A equação tem apenas uma raiz real.
- ✓ Se $\Delta < 0$: A equação não possui raízes reais.

Depois dessa análise, vamos substituir o delta na equação anterior e teremos a fórmula de Bhaskara da forma usualmente apresentada:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Agora podemos substituir os valores dos coeficientes no delta, lembrando que, no nosso exemplo, são a = 1, b = -3 e c = -10. Acompanhe:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4.(1).(-10)$$
$$\Delta = 9 + 40$$
$$\Delta = 49$$

Como o resultado do discriminante é maior do que zero, já sabemos que essa equação terá duas raízes reais e distintas. Após essa análise, podemos substituir esse valor na fórmula de Bhaskara e encontrá-las:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Tá mas e a conta terminou aí? Esse é o valor de x? Não! Lembre que temos duas raízes, ou seja, dois valores para x que zeram a equação. Precisamos realizar as operações indicadas pelo sinal “mais ou menos”, mas vamos fazer isso separadamente: quando realizamos a soma no numerador, o resultado é chamado de x’ (lê-se x linha); quando subtraímos, é chamado de x’’ (lê-se x duas linhas). Veja:

$$x' = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Então, 5 e -2 são as raízes da equação x2 - 3x - 10 = 0 e a apresentação da solução é feita como S = {5, -2}. Vamos analisar se essas raízes que encontramos de fato zeram a equação? Basta substituir 5 e -2 no lugar do x, um de cada vez. Veja:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = 5$$

$$(5^2) - 3(5) - 10 = 0$$
$$25 - 15 - 10 = 0$$
$$25 - 25 = 0$$

$$x = -2$$

$$(-2^2) - 3(2) - 10 = 0$$
$$4 + 6 - 10 = 0$$
$$10 - 10 = 0$$

Ótimo, 5 e -2 são raízes, mas como isso resolve o nosso problema original? Lembre que um lado da mesa valia x e o outro x - 3, então, como saber qual é o valor correto se temos duas raízes? Lembre que estamos buscando um valor de comprimento e uma medida desse tipo não pode ser negativa (ou você já viu alguém comprando -1,5 metros de barbante?). Portanto, a raíz -2 da equação não fará parte da nossa resposta. Então, apesar de as raízes da equação serem 5 e -2, a raiz que dá a resposta ao nosso problema é 5. Agora que sabemos disso, podemos substituir esse valor no problema em si, que era: um lado vale 3 metros a menos que o outro. Pela nossa figura, o lado maior vai valer 5 e o lado menor valerá 5 - 3 = 2. Lembrando que a área de um retângulo é calculada multiplicando base e altura (ou lados), então teremos que 5*2 = 10 m2. Exatamente o dado fornecido pelo seu avô, certo?

Então, lembre que sempre que queremos encontrar valores que satisfazem uma equação de 2º grau podemos utilizar a fórmula de Bhaskara. Vamos agora aprender outro método de resolução dessas equações.

SOMA E PRODUTO

Essa é uma técnica bem legal, mas tome cuidado ao aplicá-la, porque não é em todas as situações que ela funciona. É importante que a equação tenha todos os termos diferentes de zero (e depois você vai entender o porquê) e é interessante que a seja igual a 1. Isso não significa que você não possa aplicar soma e produto se a for diferente de 1, mas pode ficar um pouco mais chatinho de resolver, pois você terá que trabalhar com números decimais.

O método é o seguinte: existe uma relação entre os coeficientes da equação. A partir dela você encontrará valores que correspondem à soma das raízes e ao produto delas. Veja:

$$x' + x'' = Soma = \frac{-b}{a}$$

$$x' \, . \, x'' = Produto = \frac{c}{a}$$

Então, substituindo os valores do nosso problema, teremos:

$$x' + x'' = Soma = \frac{-(-3)}{1}$$

$$x' + x'' = Soma = 3$$

Ou seja, devemos obter 3 se somarmos as raízes. E o produto delas será:

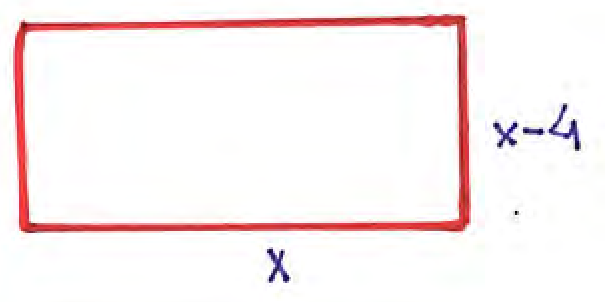
$$x' \, . \, x'' = Produto = \frac{-10}{1}$$

$$x' \, . \, x'' = Produto = -10$$

Agora basta que você faça exercícios mentais para saber quais são as raízes. Se a soma delas deve ser 3 e o produto -10, como calculamos antes, já sabemos que uma raiz é -2 e a outra é 5 – o que fecha exatamente com a Soma e o Produto, certo? Parece complicado no início, mas basta que você treine e logo estará resolvendo equações de 2º grau a partir desse método. Mas tome cuidado! Nem sempre é viável utilizar Soma e Produto (imagine uma raiz do tipo $2 + \sqrt{2}$). Se você estiver demorando mais de 30 segundos para conseguir o resultado passe para a Fórmula de Bhaskara, que também não é um bicho de sete cabeças, né?

EQUAÇÕES DE 2º GRAU INCOMPLETAS

O seu trabalho foi tão maravilhoso ao realizar a tarefa dada pelo seu avô que sua tia pediu que você fizesse uma mesa para as festas da família. Dessa vez os pré-requisitos são outros e um pouco menos específicos: um lado deve ser 4 metros menor do que o outro e a área total é 3 vezes o tamanho do maior lado. Novamente você utilizou seus conhecimentos geométricos e algébricos fazendo o desenho da mesa com as relações fornecidas. Então você fez o desenho e o lado maior, que você ainda não sabe o tamanho, foi chamado de x; o lado menor de x-4 e a área, que equivale à multiplicação desses lados, foi nomeada sendo 3.x. O esboço ficou assim:



E depois montou a equação:

$$(x).(x-4) = 3.x$$

Novamente você resolveu aplicar a técnica de isolar o x e, para isso, começou a manipular a equação. Ficou assim:

$$(x)(x-4) = 3x$$
$$x^2 - 4x = 3x$$
$$x^2 - 4x - 3x = 0$$
$$x^2 - 7x = 0$$

Olha aí uma outra equação de 2º grau! Mas você percebe que ela não é igual à anterior porque não temos o termo independente, certo? Essa é uma equação de 2º grau incompleta, que podemos resolver de duas formas. Uma como você já sabe, utilizando a fórmula de Bhaskara, mas a outra talvez seja mais rápida, que é a decomposição. Vamos ver as duas técnicas:

FÓRMULA DE BHASKARA

O primeiro passo aqui é identificar os coeficientes. Como já foi dito, a equação não possui termo independente, então o coeficiente c vale 0. Os outros estão mais fáceis de identificar, a = 1 e b = -7. Sabendo isso é possível utilizar a fórmula para encontrar as raízes. Acompanhe:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4(1)(0)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 7}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{7+7}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ x'' = \dfrac{7-7}{2} = 0 \end{cases}$$

A partir da fórmula de Bhaskara, vimos que as raízes são 7 e 0 ou S = {7, 0}, formalmente. Temos a questão da medida de uma mesa, que não pode ser negativa e nem zero, certo? Antes de analisarmos o problema a fundo, vamos aprender uma outra forma de encontrar as raízes de uma equação incompleta.

DECOMPOSIÇÃO

A equação que rege o nosso problema é:

$$x^2 - 7x = 0$$

E você viu em produtos notáveis como decompor uma equação desse tipo. Então, vamos colocar o x em evidência:

$$x^2 - 7x = 0$$
$$(x).(x-7) = 0$$

Perceba que temos dois termos sendo multiplicados. Podemos tratar esses dois termos como equações à parte e encontrar as raízes separadamente. Isso acontece porque sempre que multiplicamos alguma coisa por zero, teremos zero como resultado. Então, se um desses termos for zero conseguimos resolver o problema com mais tranquilidade. Veja:

$$x = 0$$

$$x - 7 = 0$$

Na primeira equação é bastante evidente qual é a raiz, já que x é igual a zero, certo? Já na segunda é necessário fazer uma rápida manipulação, passando o -7 para o outro lado da igualdade. Acompanhe:

$$x - 7 = 0$$
$$x = 7$$

Então, como a raiz da segunda equação é 7 e a da primeira é 0, encontramos os mesmos valores para quando abordamos o problema a partir da fórmula de Bhaskara.

Agora que vimos as duas formas de resolver esse tipo de equação de 2º grau incompleta, vamos analisar a resposta do nosso problema. Como já foi comentado, a raiz 0 é irrelevante, já que não se pode ter uma medida nula, senão um lado da mesa seria zero e assim não teríamos uma mesa, certo? Portanto, um dos lados da mesa (x) vale 7 e o outro (x - 4) vale 3, já que 7 - 4 = 3, certo? Relembrando que a sua tia disse que a área da mesa valia 3 vezes o maior lado da mesa, então teremos que 3.7 = 21 m2, que é exatamente o valor que vamos encontrar se multiplicarmos o tamanho do lado menor pelo lado maior (3.7 = 21), a área do retângulo.

Outra situação de equação de 2º grau incompleta pode acontecer se tivermos o termo independente, mas não o "companheiro" do x. Veja o exemplo abaixo:

$$x^2 - 4 = 0$$

Perceba que agora temos a = 1, b = 0 e c = -4, assim, essa equação de 2º grau é incompleta (já que "falta" um coeficiente) também. No caso específico dessa equação, é possível resolvê-la sem utilizar a fórmula de Bhaskara, apenas isolando o x e "tirando" a raiz. Consegue perceber isso? Veja:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$\pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Lembre que tanto o 2 quanto o -2 ao quadrado dão 4 como resultado, por isso é importante deixar isso bem claro na resposta, ok?

Também é possível decompor essa equação para encontrar as raízes, exatamente como fizemos anteriormente. Se decompusermos essa equação, chegaremos ao que segue:

$$x^2 - 4 = (x + 2).(x - 2) = 0$$

Encarando essa decomposição como duas equações que multiplicadas resultam em zero, podemos igualar cada uma a zero separadamente para encontrar as raízes delas. Acompanhe:

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Que são exatamente as mesmas raízes que encontramos com o outro método!

UFMT 2013 - Dada a equação do segundo grau x2 - 3x - 4 = 0, assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, os valores de Δ e da soma das raízes dessa equação.

a) 25 e 3

b) 25 e 5

c) 36 e 2

d) 36 e 6

e) 36 e 4

Alternativa correta: A

A multiplicação das soluções da equação $x^2 + 4x = 0$ é:

a) 0
b) 2
c) -2
d) 4
e) -4

Alternativa correta: A

(Cesgranrio 95) A maior raiz da equação $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ vale:

a) -1
b) 1
c) 2
d) 2,5
e) 19/4

Alternativa correta: D

A maior raíz da equação $x^2 - 8x = 0$ é

a) 8
b) -8
c) 0
d) 4
e) -2

Alternativa correta: A

EQUAÇÕES RACIONAIS E IRRACIONAIS

Iniciamos o nosso estudo de equações com as de 1º grau e agora vimos como são caracterizadas as equações de 2º grau e vários métodos de resolução. Até agora essas equações apresentaram as formas gerais ax + b = 0 (no caso das de 1º grau) ou ax2 + bx + c = 0 (no caso das de 2º grau). Como já estamos bem familiarizados com essas equações, podemos utilizá-las em situações mais complexas, como veremos a seguir.

EQUAÇÕES RACIONAIS

Equações racionais são frações caracterizadas por conterem uma ou mais variáveis no denominador. Para resolvê-las basta executarmos algumas técnicas que já conhecemos, como isolar o x ou aplicar a fórmula de Bhaskara, por exemplo. Veja a equação racional abaixo:

$$\frac{4 + x}{x - 1} = 2$$

Perceba que, para resolvê-la, ou seja, para encontrarmos o valor de x, podemos passar a equação que está no denominador para o outro lado da igualdade, multiplicando o 2. Acompanhe:

$$4 + x = 2(x - 1)$$

Você está mais familiarizado com esse formato, certo? Como é uma equação de 1º grau, basta realizar a multiplicação do lado direito da igualdade e isolar o x:

$$4 + x = 2x - 2$$
$$4 - 2 = 2x - x$$
$$2 = x$$

Simples, né? Agora vamos ver um exemplo um pouquinho mais complexo:

$$\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+2} = 3$$

Cuidado! Não caia na tentação de somar essas duas frações porque não pode, ok? Lembre que, quando temos soma de frações com denominadores diferentes, precisamos fazer o MMC entre eles. No nosso caso, esse MMC será simplesmente a multiplicação dos dois. Depois disso vamos dividir o resultado no novo MMC pelo denominador da primeira fração e multiplicar pelo numerador, em seguida faremos o mesmo com a segunda fração e, por fim, faremos o mesmo com o 3 (que no fim das contas acaba sendo 3/1, certo?). Fica mais fácil de entender visualizando o procedimento abaixo:

$$\frac{4(x+2)+5(x-1) = 3(x-1)(x+2)}{(x-1).(x+2)}$$

Como incluímos o termo que está do lado direito da igualdade, podemos cortar o denominador e ficaremos com uma grande equação que precisa ser manipulada:

$$4(x-2)+5(x-1) = 3(x-1)(x+2)$$
$$4x + 8 + 5x - 5 = 3(x^2 + 2x - x - 2)$$
$$9x + 3 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$$
$$3x^2 + 3x - 6 - 9x - 3 = 0$$
$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Essa equação é bastante familiar, certo? Agora veja que podemos dividir todos os termos por 3, para não precisarmos fazer cálculos com números tão grandes. Obteremos o seguinte:

$$\frac{3x^2 - 6x - 9 = 0}{3}$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Já que temos uma equação de 2º grau, vamos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes. Como os coeficientes são a = 1, b = -2 e c = -3, vamos calcular o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

Veja que o resultado do delta é maior do que zero e sabemos que essa equação tem duas raízes reais e distintas. Por isso, vamos aplicar a nossa querida Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$
$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}\right.$$

Então, ao manipularmos aquela equação que não parecia ser de 2º grau, encontramos sua característica real e, em seguida, encontramos suas raízes, ou solução, S = {3, -1}.

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Temos uma equação irracional quando há uma variável no radicando de uma raiz. Apesar de parecer extremamente assustador, não é tão difícil resolver uma equação dessa forma. Veja o exemplo:

$$\sqrt{5 + x} = 3$$

É bastante comum que utilizemos operações inversas para resolver equações, e nessa não é diferente. Lembre que a operação inversa da radiciação é a potenciação e vice-versa, portanto, se elevarmos essa raiz ao quadrado (já que temos uma raiz quadrada), ela será anulada. Isso só é possível se elevarmos o outro lado da equação ao quadrado também, do contrário a equação ficaria inconsistente. Depois basta isolar o x para encontrar seu valor. Veja:

$$(\sqrt{5 + x})^2 = 3^2$$
$$5 + x = 9$$
$$x = 9 - 5$$
$$x = 4$$

Bem tranquilo, certo? Claro que você pode encontrar uma equação irracional mais complicada, mas a ideia é a mesma: utilizar operações inversas na resolução.

Quais os valores de x satisfazem a seguinte equação irracional:

$$x = \sqrt{6 - x}$$

a) -3 e 2

b) 2

c) -3

d) 1

e) 2 e 3

Alternativa correta: B

Quais valores de x satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{x^2 + 1}{4} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{2}$$

a) -2, -1, 1 e 2

b) 1, 2, 3 e 4

c) -4, -2, 2 e 4

d) -2 e 2

e) 1 e -1

Alternativa correta: A

Identifique quais equações são equações racionais:

I) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{5} + 3 = 0$

II) $\frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+4} = 0$

III) $\sqrt{x} + 2x + 3 = 1$

IV) $\frac{1}{x} = 4x + 5$

a) I e II.

b) I, II e IV

c) II e IV

d) II e III

e) I, II, III e IV

Alternativa correta: C

Identifique quais equações são equações irracionais:

I) $x^4 + 2x^2 - 5 = 0$

II) $\sqrt{4}\,x^2 + 1 - 4x = 0$

III) $\sqrt{x^2 + 4x} = 5x$

IV) $\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = 2$

a) I e II

b) II e III

c) III e IV

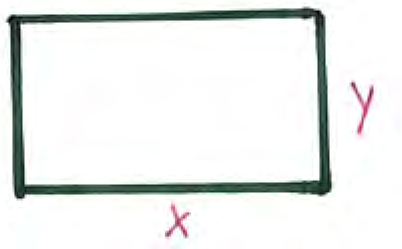
d) I e IV

e) II, III e IV

Alternativa correta: C

SISTEMAS 2 X 2 POR SUBSTITUIÇÃO E ADIÇÃO

Seus familiares continuam pedindo para que você construa mesas, mas agora as instruções fornecidas por eles são um pouco diferentes. Sua prima quer que você faça uma mesa e lhe disse que 9 é a soma entre o lado maior e o lado menor que ela deseja que o móvel tenha. Como você não entendeu, ela deu outra informação: a soma de três vezes o lado maior e quatro vezes lado menor é 31. Você conseguiu desvendar os demais enigmas feitos pelos seus parentes, mas esse está mais complicado. Para tentar organizar as ideias, você resolveu desenhar a mesa chamando um lado de x e o outro de y:



Em seguida, você organizou as instruções fornecidas pela sua prima no formato de equações. A primeira diz que 9 é a soma entre o lado menor e o lado maior, que pode ser reescrito como:

$$x + y = 9$$

A outra forma que sua prima encontrou de tentar te ajudar a compreender a medida da mesa foi dizendo que a soma de três vezes o lado maior com quatro vezes o lado menor era 31, que pode ser reescrito como:

$$3x + 4y = 31$$

Apesar de serem equações completamente diferentes, elas descrevem o mesmo problema, a relação entre x e y, ou os lados da mesa. Por isso, podemos vinculá-las para conseguir resolver esse problema. Essa associação que realizaremos com as duas equações é chamada de Sistema de Equações Lineares e pode conter várias equações e variáveis e nem sempre é possível resolvê-lo. No nosso caso será possível já que temos duas equações e duas variáveis (abordaremos mais profundamente esse tema na apostila de Sistemas Lineares), por isso teremos um sisteminha chamado de 2 x 2. Veja como são montados:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Coloca-se uma equação em cima da outra, de preferência com a mesma ordem de variáveis, para facilitar visualmente. Outro detalhe é que as equações ficam compreendidas em uma chave. Agora que já sabemos disso, como é que resolvemos? Vamos abordar diversas formas de resolução de sistemas lineares ao longo do nosso estudo da Matemática, mas, por enquanto, vamos nos ater a apenas duas: resolução de sistemas por adição e por substituição.

RESOLUÇÃO POR ADIÇÃO

Essa forma de resolver o problema é bem interessante, mas às vezes é necessário fazer adaptações para que ela funcione. O preceito aqui é conseguir excluir uma das variáveis para que seja possível encontrar a segunda. Perceba que, na nossa equação, teremos 4x + 5y = 40 se somarmos todos os termos e isso não vai nos ajudar em nada. Mas e se multiplicarmos a primeira equação por -3, você consegue notar que será possível anular o primeiro termo das duas equações? Veja como fica:

$$\begin{cases} x + y = 9 \; (-3) \\ 3x + 4y = 31 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Somando as duas equações, chegaremos a:

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \\ \hline 0 + 1y = 4 \end{array}$$

Então, concluímos que y = 4, que definimos anteriormente que é o menor lado da mesa. Para sabermos o valor de x, o lado maior, basta substituir o valor de y em uma das das equações originais.

$$x + y = 9$$
$$x + 4 = 9$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

Então, o lado maior vale 5 e o lado menor 4.

RESOLUÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Esse método é baseado em substituir o valor de uma variável, dada por uma equação, na outra. Por exemplo, se isolarmos o x da primeira equação, chegaremos a um valor, composto pela variável y que, se substituído na segunda equação, fornecerá o valor de y. Veja o exemplo com o mesmo sistema anterior:

$$x + y = 9 \quad \rightsquigarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo o valor de x na segunda equação e fazendo as manipulações necessárias:

$$3x + 4y = 31$$
$$3(9 - y) + 4y = 31$$
$$27 - 3y + 4y = 31$$
$$27 + y = 31$$
$$y = 31 - 27 = 4$$

Chegaremos ao mesmo valor encontrado anteriormente para y, o lado menor, que vale 4. E o valor de x é facilmente encontrado se, a partir da equação em que o isolamos, substituirmos o valor de y:

$$x = 9 - y$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

E assim chegamos aos mesmos resultados que obtivemos anteriormente! Portanto, agora, para sistemas 2x2, você já conhece dois método de resolução, o da adição e o da substituição.

Uma fazenda possui x galinhas e y vacas. Um fazendeiro constatou que há um total de 35 cabeças e 100 patas de animais. Qual dos seguintes sistemas de equações que nos permite calcular quantas vacas e quantas galinhas há na fazenda?

a) $x + y = 35$
$4x + 2y = 100$

b) $x + y = 100$
$2x + 4y = 35$

c) $x + y = 100$
$4x + 2y = 35$

d) $x + y = 35$
$2x + 2y = 100$

e) $x + y = 35$
$2x + 4y = 100$

Alternativa correta: E

(UERJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Alternativa correta: B

(PUC). Certo dia, numa mesma casa de câmbio, Sassa trocou 40 dólares e 20 euros por R$ 225,00 e Lilli trocou 50 dólares e 40 euros por R$ 336,00. Nesse dia, 1 euro estava cotado em:

a) R$ 3,80

b) R$ 3,75

c) R$ 3,70

d) R$ 3,68

e) R$ 3,65

Alternativa correta: E

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.